FICHE D'EXERCICES CORRIGÉS

# Valeur absolue

2de · Distance, intervalles centrés, encadrements

Le cours de Seconde sur la valeur absolue la définit comme une distance. Cette fiche part de ce sens : mesurer des distances, passer d'un intervalle centré à une condition $|x-a| \leqslant r$, contrôler une précision, puis étudier la fonction valeur absolue.

## Une distance sur la droite

### Exercice 1 — Calculer sans calculatrice

Corrigé p. 4 →

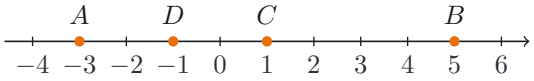
Donner chaque nombre sans barres de valeur absolue. Pour les deux derniers, commencer par trouver le signe de l'expression.

1. $|-7|$
2. $|12-5|$
3. $|5-12|$
4. $|-3{,}5|$
5. $|\pi-3|$
6. $|2-\sqrt{5}|$

### Exercice 2 — Lire des distances sur une droite graduée

Corrigé p. 4 →

Sur la droite graduée, les points $A$, $B$, $C$ et $D$ ont pour abscisses $-3$, $5$, $1$ et $-1$. La distance entre deux réels $a$ et $b$ vaut $|b-a|$.




1. Calculer les distances $AB$, $AC$ et $CD$ avec la valeur absolue, puis les vérifier sur la droite.
2. Montrer que $C$ est à égale distance de $A$ et de $B$. Que représente-t-il pour le segment $[AB]$ ?
3. Quels réels sont à la distance $2$ de $1$ ? Lequel des quatre points a pour abscisse l'un d'eux ?
4. Traduire par une phrase avec le mot distance : $|x-5|=3$, puis donner les réels $x$ qui conviennent.

### Exercice 3 — Vrai ou faux

Corrigé p. 4 →

Dire si chaque affirmation est vraie pour tous les réels $a$ et $b$, puis justifier : une preuve si elle est vraie, un contre-exemple si elle est fausse.

1. $|-a|=|a|$
2. $|a-b|=|b-a|$
3. $|a+b|=|a|+|b|$
4. $\sqrt{a^2}=a$
5. Si $|a|=|b|$, alors $a=b$.
6. $|a| \geqslant 0$

# Intervalles centrés et inéquations

## Exercice 4 — De l'intervalle à la condition

Corrigé p. 4 →

L'intervalle $[a-r\,;a+r]$ a pour centre $a$ et pour rayon $r$ : il contient les réels $x$ tels que $|x-a| \leqslant r$. Traduire chaque intervalle par une condition, ou chaque condition par un intervalle.

1. $x \in [2\,;8]$
2. $x \in [-4\,;1]$
3. $x \in [-1{,}2\,;-0{,}8]$
4. $|x-1| \leqslant 0{,}5$
5. $|x+2| \leqslant 3$
6. $|x| \leqslant 4$

## Exercice 5 — Résoudre en lisant une distance

Corrigé p. 4 →

Résoudre dans $\mathbb{R}$ chaque inéquation, puis représenter l'ensemble des solutions sur une droite graduée.

1. $|x-4| \leqslant 1$
2. $|x+3| \leqslant 2$
3. $|2-x| \leqslant 5$
4. $|x-1| \leqslant -1$
5. $|x-6| \leqslant 0$

**Indice.** Écrire d'abord l'expression sous la forme $|x-a|$, puis lire : « la distance de $x$ à $a$ est au plus $r$ ».

## Exercice 6 — Valeur approchée et précision

Corrigé p. 4 →

Dire que $v$ est une valeur approchée de $x$ à $p$ près signifie que $|x-v| \leqslant p$.

1. La calculatrice affiche $\sqrt{2} \approx 1{,}414\,2$. Justifier que $1{,}414$ est une valeur approchée de $\sqrt{2}$ à $10^{-3}$ près, et écrire l'encadrement obtenu.
2. On sait que $3{,}141\,5 < \pi < 3{,}141\,6$. Trouver un réel $v$ et une précision $p$ tels que $|\pi - v| \leqslant p$.
3. Une pièce doit mesurer $25$ mm à $0{,}2$ mm près. Écrire cette condition avec une valeur absolue, puis dire si les pièces de $24{,}85$ mm, $25{,}21$ mm et $24{,}8$ mm sont acceptées.

## Exercice 7 — Démontrer la caractérisation

Corrigé p. 5 →

Soient $a$ un réel et $r$ un réel positif. On veut démontrer que $|x-a| \leqslant r$ équivaut à $a-r \leqslant x \leqslant a+r$.

1. On suppose $x \geqslant a$. Écrire $|x-a|$ sans barres, puis montrer que $|x-a| \leqslant r$ équivaut à $a \leqslant x \leqslant a+r$.
2. On suppose $x < a$. Montrer de même que $|x-a| \leqslant r$ équivaut à $a-r \leqslant x < a$.
3. Conclure en réunissant les deux cas.

# Racine d'un carré et fonction valeur absolue

## Exercice 8 — La racine d'un carré

Corrigé p. 5 →

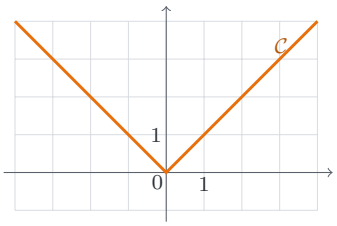
Pour tout réel $a$, $\sqrt{a^2} = |a|$. Écrire chaque expression sans racine ni valeur absolue.

1. $\sqrt{(-5)^2}$
2. $\sqrt{(1-\sqrt{3})^2}$
3. $\sqrt{(x-2)^2}$, pour $x < 2$
4. $\sqrt{x^2-6x+9}$, pour $x \geqslant 3$

## Exercice 9 — La fonction valeur absolue

Corrigé p. 5 →

La fonction $f$ est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = |x|$. Sa courbe $\mathcal{C}$ est tracée ci-contre.




1. Calculer $f(-2{,}5)$ et $f(1{,}7)$. Écrire $f(x)$ sans barres selon le signe de $x$.
2. Donner les antécédents de $3$, puis ceux de $-1$.
3. Dresser le tableau de variation de $f$ sur $\mathbb{R}$ et donner son minimum.
4. Montrer que $f(-x) = f(x)$ pour tout réel $x$. Quelle symétrie de $\mathcal{C}$ cela traduit-il ?
5. Résoudre graphiquement $f(x) \leqslant 2$, puis vérifier avec une distance.

# Trois problèmes

## Exercice 10 — Deux antennes le long d'une route

Corrigé p. 5 →

Une route droite est repérée par les bornes kilométriques. Une antenne placée au kilomètre $18$ couvre la route jusqu'à $7$ km de distance ; une seconde, au kilomètre $30$, la couvre jusqu'à $6$ km.

1. Traduire par une inéquation, puis par un intervalle, les positions $x$ couvertes par la première antenne.
2. Même question pour la seconde antenne.
3. Sur quelle portion de route les deux antennes captent-elles ? Sur quelle portion au moins une capte-t-elle ?
4. On veut une troisième antenne qui couvre exactement la portion entre le kilomètre $0$ et la première zone. Où la placer, et avec quelle portée ?

## Exercice 11 — Contrôler le remplissage de sachets

Corrigé p. 5 →

Une machine remplit des sachets de farine annoncés à $500$ g. Un sachet est accepté si sa masse $m$, en grammes, vérifie $|m - 500| \leqslant 15$.

1. Donner l'intervalle des masses acceptées.
2. Les sachets de $492$ g, $516$ g et $485$ g sont-ils acceptés ?
3. Une seconde machine produit des sachets dont la masse est comprise entre $490$ g et $520$ g. Écrire cet encadrement sous la forme $|m - a| \leqslant r$.
4. Quelle tolérance minimale autour de $500$ g faudrait-il pour accepter tous les sachets de la seconde machine ?

## Exercice 12 — Une alarme de température

Corrigé p. 5 →

Une salle de serveurs doit rester à $19$ °C. Une alarme ne se déclenche pas tant que la température $T$, en °C, reste à $1{,}5$ °C au plus de cette consigne.

1. Traduire cette condition par une inéquation, puis par un intervalle.
2. L'alarme se déclenche-t-elle pour $T = 17{,}2$, $T = 20{,}5$ et $T = 21$ ?
3. On passe la consigne à $20$ °C, avec la même tolérance. Pour quelles températures l'alarme ne se déclenche-t-elle avec aucune des deux consignes ?

# Corrigés détaillés

## Corrigé 1 · Calculer sans calculatrice

Revenir à l'énoncé

1. $|-7| = 7$
2. $|12-5| = |7| = 7$
3. $|5-12| = |-7| = 7$
4. $|-3{,}5| = 3{,}5$
5. $\pi > 3$, donc $|\pi - 3| = \pi - 3$.
6. $|2-\sqrt{5}| = \sqrt{5} - 2$, car $\sqrt{5} > \sqrt{4} = 2$ donne $2 - \sqrt{5} < 0$.

## Corrigé 2 · Lire des distances sur une droite graduée

Revenir à l'énoncé

1. $AB = |5-(-3)| = 8$, $AC = |1-(-3)| = 4$ et $CD = |-1-1| = |-2| = 2$. Sur la droite, on compte bien $8$, $4$ et $2$ unités entre ces points.
2. $CA = 4$ et $CB = |5-1| = 4$ : $C$ est à égale distance de $A$ et de $B$. Comme il est entre les deux, c'est le milieu de $[AB]$ ; on vérifie que $\dfrac{-3+5}{2} = 1$.
3. Ce sont $1-2 = -1$ et $1+2 = 3$. Le point $D$, d'abscisse $-1$, est l'un d'eux.
4. « La distance entre $x$ et $5$ vaut $3$. » Donc $x = 5-3 = 2$ ou $x = 5+3 = 8$.

## Corrigé 3 · Vrai ou faux

Revenir à l'énoncé

1. Vrai : $a$ et $-a$ sont symétriques par rapport à $0$, donc à la même distance de $0$.
2. Vrai : la distance de $a$ à $b$ est aussi celle de $b$ à $a$.
3. Faux : pour $a = 3$ et $b = -3$, $|a+b| = 0$ alors que $|a| + |b| = 6$.
4. Faux : pour $a = -4$, $\sqrt{(-4)^2} = \sqrt{16} = 4 \neq -4$. En fait, $\sqrt{a^2} = |a|$.
5. Faux : $|2| = |-2|$ alors que $2 \neq -2$.
6. Vrai : une distance n'est jamais négative.

## Corrigé 4 · De l'intervalle à la condition

Revenir à l'énoncé

1. Centre $\dfrac{2+8}{2} = 5$, rayon $8-5 = 3$ : $|x-5| \leqslant 3$.
2. Le centre est $-1{,}5$, milieu de $-4$ et $1$, et le rayon $2{,}5$ : $|x+1{,}5| \leqslant 2{,}5$.
3. Centre $-1$, rayon $0{,}2$ : $|x+1| \leqslant 0{,}2$.
4. Centre $1$, rayon $0{,}5$ : $x \in [0{,}5\,;1{,}5]$.
5. $|x+2| = |x-(-2)|$ : centre $-2$, rayon $3$, donc $x \in [-5\,;1]$.
6. Centre $0$, rayon $4$ : $x \in [-4\,;4]$.

## Corrigé 5 · Résoudre en lisant une distance

Revenir à l'énoncé

1. La distance de $x$ à $4$ est au plus $1$ : $S = [3\,;5]$.
2. $|x+3| = |x-(-3)|$ : la distance de $x$ à $-3$ est au plus $2$, donc $S = [-5\,;-1]$.
3. $|2-x| = |x-2|$ : la distance de $x$ à $2$ est au plus $5$, donc $S = [-3\,;7]$.
4. Une distance n'est jamais strictement négative : aucun réel ne convient, $S = \emptyset$.
5. La distance de $x$ à $6$ est nulle seulement pour $x = 6$ : $S = \{6\}$.

## Corrigé 6 · Valeur approchée et précision

Revenir à l'énoncé

1. L'affichage $1{,}414\,2$ est un arrondi à $10^{-4}$, donc $1{,}414\,15 \leqslant \sqrt{2} \leqslant 1{,}414\,25$. Ainsi $|\sqrt{2} - 1{,}414| \leqslant 0{,}000\,25 \leqslant 0{,}001$, et $1{,}413 \leqslant \sqrt{2} \leqslant 1{,}415$.
2. Le centre de l'intervalle est $v = 3{,}141\,55$ et son rayon $p = 0{,}000\,05$ : $|\pi - 3{,}141\,55| \leqslant 0{,}000\,05$.
3. On note $L$ la longueur, en mm : $|L - 25| \leqslant 0{,}2$, soit $L \in [24{,}8\,;25{,}2]$. La pièce de $24{,}85$ mm est acceptée ($0{,}15 \leqslant 0{,}2$), celle de $25{,}21$ mm est refusée ($0{,}21 > 0{,}2$), celle de $24{,}8$ mm est acceptée, de justesse ($0{,}2 \leqslant 0{,}2$).

## Corrigé 7 · Démontrer la caractérisation

Revenir à l'énoncé

1. Si $x \geqslant a$, alors $x - a \geqslant 0$ et $|x - a| = x - a$. La condition s'écrit $x - a \leqslant r$, soit $x \leqslant a + r$. Avec $x \geqslant a$, on obtient $a \leqslant x \leqslant a + r$.
2. Si $x < a$, alors $x - a < 0$ et $|x - a| = a - x$. La condition s'écrit $a - x \leqslant r$, soit $x \geqslant a - r$. Avec $x < a$, on obtient $a - r \leqslant x < a$.
3. Tout réel vérifie l'un des deux cas. Les réels qui conviennent sont donc ceux de $[a - r\,;a[$ et ceux de $[a\,;a + r]$, c'est-à-dire ceux de $[a - r\,;a + r]$.

## Corrigé 8 · La racine d'un carré

Revenir à l'énoncé

1. $\sqrt{(-5)^2} = |-5| = 5$.
2. $\sqrt{3} > 1$, donc $1 - \sqrt{3} < 0$ et $\sqrt{(1-\sqrt{3})^2} = |1 - \sqrt{3}| = \sqrt{3} - 1$.
3. $x - 2 < 0$, donc $\sqrt{(x-2)^2} = |x - 2| = 2 - x$.
4. $x^2 - 6x + 9 = (x - 3)^2$, donc l'expression vaut $|x - 3| = x - 3$, car $x - 3 \geqslant 0$.

## Corrigé 9 · La fonction valeur absolue

Revenir à l'énoncé

1. $f(-2{,}5) = 2{,}5$ et $f(1{,}7) = 1{,}7$. Si $x \geqslant 0$, $f(x) = x$ ; si $x < 0$, $f(x) = -x$.
2. $|x| = 3$ pour $x = -3$ et $x = 3$. Une valeur absolue n'est jamais négative : $-1$ n'a pas d'antécédent.
3. $f$ est décroissante sur $]-\infty\,;0]$, où $f(x) = -x$, et croissante sur $[0\,;+\infty[$, où $f(x) = x$. Son minimum vaut $0$, atteint en $x = 0$.

| $x$ | $-\infty$ | $0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f$ | ↘ | $0$ | ↗ |

4. $|-x| = |x|$, car $x$ et $-x$ sont à la même distance de $0$. La courbe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
5. La courbe est sous la droite d'équation $y = 2$, ou sur elle, pour $x$ entre $-2$ et $2$ : $S = [-2\,;2]$. En effet, la distance de $x$ à $0$ est au plus $2$.

## Corrigé 10 · Deux antennes le long d'une route

Revenir à l'énoncé

1. $|x - 18| \leqslant 7$, soit $x \in [11\,;25]$.
2. $|x - 30| \leqslant 6$, soit $x \in [24\,;36]$.
3. Les deux captent sur $[24\,;25]$. Au moins une capte sur $[11\,;36]$, car les deux intervalles se chevauchent.
4. Pour couvrir $[0\,;11]$, de centre $5{,}5$ et de rayon $5{,}5$ : antenne au kilomètre $5{,}5$, de portée $5{,}5$ km.

## Corrigé 11 · Contrôler le remplissage de sachets

Revenir à l'énoncé

1. $m \in [485\,;515]$.
2. $|492 - 500| = 8 \leqslant 15$ : accepté. $|516 - 500| = 16 > 15$ : refusé. $|485 - 500| = 15 \leqslant 15$ : accepté.
3. Centre $505$, milieu de $490$ et $520$, rayon $15$ : $|m - 505| \leqslant 15$.
4. Le sachet de $520$ g, le plus éloigné, est à $20$ g de $500$ g : la tolérance minimale est $20$ g.

## Corrigé 12 · Une alarme de température

Revenir à l'énoncé

1. $|T - 19| \leqslant 1{,}5$, soit $T \in [17{,}5\,;20{,}5]$.
2. $17{,}2$ et $21$ sont à $1{,}8$ et $2$ de la consigne : l'alarme se déclenche. $20{,}5$ est à $1{,}5$ : elle ne se déclenche pas.
3. $|T - 20| \leqslant 1{,}5$ donne $[18{,}5\,;21{,}5]$ : aucune alarme sur $[18{,}5\,;20{,}5]$.

Pour continuer : les exercices en ligne sur la valeur absolue, puis le rappel des intervalles de Seconde.