FICHE D'EXERCICES CORRIGÉS

Trigonométrie

1re · Radian, cercle trigonométrique, valeurs remarquables

Le cours sur le cercle trigonométrique en Première définit le radian, l'enroulement et les valeurs remarquables. Cette fiche passe de la mesure d'un arc à la lecture du cercle, démontre les valeurs de cosinus et de sinus au programme, puis termine par la méthode d'Archimède.

Radian et longueur d'arc

Exercice 1 — Du degré au radian

Corrigé p. 4 →

Convertir en radians les mesures en degrés, et en degrés les mesures en radians.

1. $60°$
2. $135°$
3. $210°$
4. $\dfrac{2\pi}{3}$
5. $\dfrac{7\pi}{4}$
6. $\dfrac{\pi}{5}$

Exercice 2 — L'horloge et le rond-point

Corrigé p. 4 →

Sur un cercle de rayon r, un arc intercepté par un angle de α radians mesure $\ell = r\alpha$. L'aiguille des minutes d'une horloge mesure 12 cm.

1. Quel angle, en radians, l'aiguille balaie-t-elle en 20 minutes ?
2. Quelle longueur son extrémité parcourt-elle alors ? Donner la valeur exacte, puis une valeur approchée au millimètre.
3. Au bout de combien de minutes son extrémité a-t-elle parcouru 6π cm ?
4. Sur un rond-point de rayon 15 m, une voiture parcourt un arc de 22 m. Donner l'angle balayé en radians, au centième, puis en degrés, à l'unité.

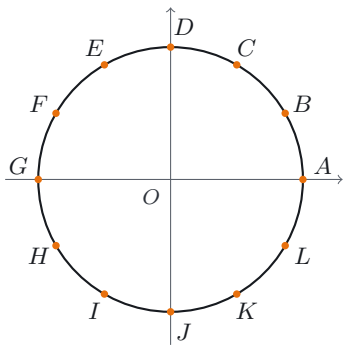
Enrouler la droite sur le cercle

Exercice 3 — Trouver le point image

Corrigé p. 5 →

Sur la figure, le cercle trigonométrique est partagé en douze arcs égaux. Le point A est l'image de 0, et les points se suivent dans le sens direct. Donner le point image de chaque réel.

1. $\dfrac{\pi}{2}$
2. $-\dfrac{\pi}{3}$
3. $\dfrac{7\pi}{6}$
4. 5π
5. $\dfrac{17\pi}{6}$
6. $-\dfrac{5\pi}{2}$



Exercice 4 — Deux réels, une même image

Corrigé p. 5 →

Deux réels ont la même image sur le cercle lorsque leur différence est un multiple entier de 2π.

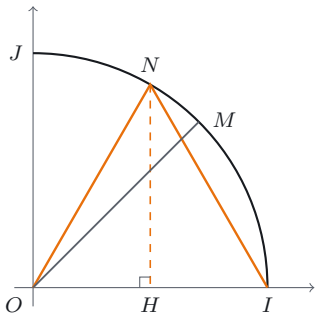
1. Montrer que $\frac{19\pi}{6}$ et $-\frac{5\pi}{6}$ ont la même image.
2. Parmi $\frac{13\pi}{4}$, $-\frac{3\pi}{4}$, $\frac{9\pi}{4}$ et $-\frac{11\pi}{4}$, lesquels ont la même image que $\frac{5\pi}{4}$?
3. Trouver le réel de l'intervalle $]-\pi\,;\pi]$ qui a la même image que $\frac{31\pi}{6}$.

Valeurs remarquables

Exercice 5 — Démontrer les valeurs de $\pi/4$ et de $\pi/3$

Corrigé p. 5 →

Dans le repère $(O\,;I,J)$, M et N sont les images de $\frac{\pi}{4}$ et de $\frac{\pi}{3}$ sur le cercle trigonométrique. Le point H est le pied de la hauteur issue de N dans le triangle OIN.



1. Expliquer pourquoi les coordonnées de M sont égales.
2. En utilisant $OM = 1$, en déduire $\cos\frac{\pi}{4}$ et $\sin\frac{\pi}{4}$.
3. Montrer que le triangle OIN est équilatéral.
4. En déduire $\cos\frac{\pi}{3}$ et $\sin\frac{\pi}{3}$.

Exercice 6 — Lire les angles associés

Corrigé p. 5 →

Donner $\cos x$ et $\sin x$ pour chaque valeur de x, en repérant sur le cercle un point connu ou son symétrique.

1. $x = \frac{2\pi}{3}$
2. $x = \frac{5\pi}{4}$
3. $x = -\frac{\pi}{6}$
4. $x = \frac{5\pi}{3}$
5. $x = \frac{3\pi}{2}$
6. $x = \frac{7\pi}{3}$

Exercice 7 — Un sinus connu, un cosinus à trouver

Corrigé p. 6 →

Soit x un réel de l'intervalle $\left[\frac{\pi}{2}\,;\pi\right]$ tel que $\sin x = \frac{3}{5}$.

1. Calculer $\cos x$.
2. En lisant le cercle, donner $\cos(\pi - x)$ et $\sin(\pi - x)$.
3. Donner de même $\cos(-x)$ et $\sin(-x)$.
4. Donner enfin $\cos(x + \pi)$ et $\sin(x + \pi)$.

Indice. Le point image de x est sur le cercle : ses coordonnées vérifient une relation.

Exercice 8 — Du triangle rectangle à l'ombre d'un poteau

Corrigé p. 6 →

On utilise les valeurs remarquables dans des triangles rectangles. Donner les valeurs exactes.

1. Le triangle ABC est rectangle en A, avec $BC = 10$ cm, et l'angle en B mesure $\frac{\pi}{6}$. Calculer AC et AB.
2. Le triangle DEF est rectangle en D, avec $DE = DF = 7$ cm. Calculer EF en utilisant $\cos\frac{\pi}{4}$.
3. Un poteau vertical de 6 m de haut est planté sur un sol horizontal. Les rayons du soleil font avec le sol un angle de $\frac{\pi}{3}$. Calculer la longueur de son ombre.

Pour aller plus loin : résoudre sur le cercle

Exercice 9 — Lire le cercle à l'envers

Corrigé p. 6 →

Déterminer, dans l'intervalle $[0\,;2\pi[$, tous les réels x qui conviennent, en plaçant les points sur le cercle.

1. $\cos x = \frac{1}{2}$
2. $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$
3. $\cos x = 0$
4. $2\cos x + \sqrt{3} = 0$
5. $\sin x = 1$

Exercice 10 — Deux conditions à la fois

Corrigé p. 6 →

Le cosinus seul ne suffit pas toujours à repérer un point du cercle.

1. Trouver le réel x de $[0\,;2\pi[$ tel que $\cos x = -\frac{1}{2}$ et $\sin x > 0$.
2. Trouver le réel x de $]-\pi\,;\pi]$ tel que $\sin x = \frac{1}{2}$ et $\cos x < 0$.
3. Existe-t-il un réel x tel que $\cos x = \frac{1}{2}$ et $\sin x = \frac{1}{2}$?
4. Dans $]-\pi\,;\pi]$, quels réels vérifient $\cos x \geqslant \frac{1}{2}$? Lire la réponse sur le cercle.

Exercice 11 — Une équation du second degré en cosinus

Corrigé p. 6 →

On veut résoudre, dans $[0\,;2\pi[$, l'équation $2\cos^2 x - 3\cos x + 1 = 0$.

1. Résoudre l'équation $2X^2 - 3X + 1 = 0$.
2. Pourquoi les deux solutions trouvées peuvent-elles être des cosinus ?
3. En déduire les solutions de l'équation de départ.

Indice. Poser $X = \cos x$ ramène à une équation du second degré.

Exercice 12 — La marée dans un port

Corrigé p. 7 →

Entre deux pleines mers, la hauteur d'eau dans un port, en mètres, est modélisée pour t dans $[0\,;12]$ par $h(t) = 6 + 4\cos\left(\dfrac{\pi t}{6}\right)$, où t est le temps en heures après la pleine mer.

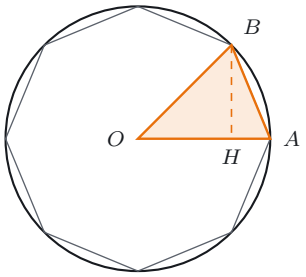
1. Calculer $h(0)$, $h(3)$ et $h(6)$.
2. Justifier que la hauteur reste comprise entre 2 m et 10 m.
3. Calculer $h(2)$ et $h(10)$.
4. Un bateau a besoin d'au moins 8 m d'eau. Sur quelles périodes peut-il entrer dans le port ?

La méthode d'Archimède

Exercice 13 — Approcher π à la manière d'Archimède

Corrigé p. 7 →

Sur la figure, un polygone régulier à n côtés, avec $n \geqslant 4$, est inscrit dans un cercle de rayon 1. Le triangle OAB a pour sommets le centre et deux sommets voisins du polygone, avec $\widehat{AOB} = \alpha$. Le point H est le pied de la hauteur issue de B.



1. Pour α dans $\left]0\,;\dfrac{\pi}{2}\right]$, montrer que $BH = \sin\alpha$, puis que l'aire de OAB vaut $\dfrac{1}{2}\sin\alpha$.
2. Exprimer α en fonction de n, puis l'aire $\mathcal{A}_n$ du polygone.
3. Calculer les valeurs exactes de l'aire pour $n = 6$, $n = 8$ et $n = 12$.
4. À la calculatrice, en mode radian, donner $\mathcal{A}_{96}$ et $\mathcal{A}_{384}$ à 10^{-3} près. Que peut-on dire de ces nombres ?

Corrigés détaillés

Corrigé 1 · Du degré au radian

Revenir à l'énoncé

1. $60° = 60 \times \dfrac{\pi}{180} = \dfrac{\pi}{3}$
2. $135° = 135 \times \dfrac{\pi}{180} = \dfrac{3\pi}{4}$
3. $210° = 210 \times \dfrac{\pi}{180} = \dfrac{7\pi}{6}$
4. $\dfrac{2\pi}{3} = \dfrac{2 \times 180°}{3} = 120°$
5. $\dfrac{7\pi}{4} = \dfrac{7 \times 180°}{4} = 315°$
6. $\dfrac{\pi}{5} = \dfrac{180°}{5} = 36°$

Corrigé 2 · L'horloge et le rond-point

Revenir à l'énoncé

1. En 60 minutes, l'aiguille balaie 2π radians. En 20 minutes, elle balaie le tiers : $\dfrac{2\pi}{3}$ radians.
2. $\ell = 12 \times \dfrac{2\pi}{3} = 8\pi$ cm, soit environ $25{,}1$ cm.
3. $\alpha = \dfrac{6\pi}{12} = \dfrac{\pi}{2}$: c'est un quart de tour, soit 15 minutes.
4. $\alpha = \dfrac{22}{15} \approx 1{,}47$ radian, soit $\dfrac{22}{15} \times \dfrac{180}{\pi} \approx 84°$.

Corrigé 3 · Trouver le point image

Revenir à l'énoncé

1. $\frac{\pi}{2}$ est un quart de tour, soit trois arcs de $\frac{\pi}{6}$: c'est D.
2. $-\frac{\pi}{3}$ correspond à deux arcs dans le sens indirect : c'est K.
3. $\frac{7\pi}{6}$ correspond à sept arcs dans le sens direct : c'est H.
4. $5\pi = 4\pi + \pi$: deux tours complets, puis un demi-tour. C'est G.
5. $\frac{17\pi}{6} = 2\pi + \frac{5\pi}{6}$: un tour, puis cinq arcs. C'est F.
6. $-\frac{5\pi}{2} = -2\pi - \frac{\pi}{2}$: un tour en arrière, puis trois arcs dans le sens indirect. C'est J.

Corrigé 4 · Deux réels, une même image

Revenir à l'énoncé

1. $\frac{19\pi}{6} - \left(-\frac{5\pi}{6}\right) = \frac{24\pi}{6} = 4\pi = 2 \times 2\pi$.
2. Les différences avec $\frac{5\pi}{4}$ valent 2π, -2π, π et -4π. Seul $\frac{9\pi}{4}$ ne convient pas : sa différence π n'est pas un multiple de 2π.
3. $\frac{31\pi}{6} - 6\pi = \frac{31\pi - 36\pi}{6} = -\frac{5\pi}{6}$, qui appartient à l'intervalle.

Corrigé 5 · Démontrer les valeurs de $\pi/4$ et de $\pi/3$

Revenir à l'énoncé

1. L'arc IM mesure $\frac{\pi}{4}$, la moitié de l'arc IJ : (OM) est la bissectrice de l'angle droit $\widehat{IOJ}$, axe de symétrie du repère. Le point M est sur cet axe, donc ses coordonnées x et y sont égales, et positives.
2. $x^2 + y^2 = 1$ avec $x = y$ donne $2x^2 = 1$, soit $x = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, car $x > 0$. Donc $\cos\frac{\pi}{4} = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.
3. $OI = ON = 1$: le triangle est isocèle en O. L'arc IN mesure $\frac{\pi}{3}$, donc l'angle en O mesure $60°$: le triangle est équilatéral.
4. Dans un triangle équilatéral, la hauteur $[NH]$ est aussi une médiane : H est le milieu de $[OI]$, donc $\cos\frac{\pi}{3} = OH = \frac{1}{2}$. Le théorème de Pythagore donne $NH^2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$, donc $\sin\frac{\pi}{3} = NH = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Corrigé 6 · Lire les angles associés

Revenir à l'énoncé

1. $\frac{2\pi}{3} = \pi - \frac{\pi}{3}$: symétrique par rapport à l'axe des ordonnées. $\cos x = -\frac{1}{2}$ et $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$.
2. $\frac{5\pi}{4} = \pi + \frac{\pi}{4}$: symétrique par rapport à O. $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.
3. Symétrique de $\frac{\pi}{6}$ par rapport à l'axe des abscisses. $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin x = -\frac{1}{2}$.
4. $\frac{5\pi}{3} = 2\pi - \frac{\pi}{3}$: même image que $-\frac{\pi}{3}$. $\cos x = \frac{1}{2}$ et $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.
5. Le point est le bas du cercle, de coordonnées $(0\,;-1)$. $\cos x = 0$ et $\sin x = -1$.
6. $\frac{7\pi}{3} = 2\pi + \frac{\pi}{3}$: même image que $\frac{\pi}{3}$. $\cos x = \frac{1}{2}$ et $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Corrigé 7 · Un sinus connu, un cosinus à trouver

Revenir à l'énoncé

1. $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x = 1 - \dfrac{9}{25} = \dfrac{16}{25}$. Sur cet intervalle, le cosinus est négatif ou nul, donc $\cos x = -\dfrac{4}{5}$.
2. Symétrie par rapport à l'axe des ordonnées : $\cos(\pi - x) = \dfrac{4}{5}$ et $\sin(\pi - x) = \dfrac{3}{5}$.
3. Symétrie par rapport à l'axe des abscisses : $\cos(-x) = -\dfrac{4}{5}$ et $\sin(-x) = -\dfrac{3}{5}$.
4. Symétrie par rapport à O : $\cos(x + \pi) = \dfrac{4}{5}$ et $\sin(x + \pi) = -\dfrac{3}{5}$.

Corrigé 8 · Du triangle rectangle à l'ombre d'un poteau

Revenir à l'énoncé

1. $AC = 10 \sin \dfrac{\pi}{6} = 5$ cm et $AB = 10 \cos \dfrac{\pi}{6} = 5\sqrt{3}$ cm.
2. L'angle en E mesure $\dfrac{\pi}{4}$, donc $\dfrac{DE}{EF} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, soit $EF = \dfrac{14}{\sqrt{2}} = 7\sqrt{2}$ cm.
3. Le rayon qui passe par le sommet mesure L, avec $\sin \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{6}{L}$, donc $L = \dfrac{12}{\sqrt{3}} = 4\sqrt{3}$ m. L'ombre mesure $L \cos \dfrac{\pi}{3} = 2\sqrt{3}$ m, soit environ $3{,}46$ m.

Corrigé 9 · Lire le cercle à l'envers

Revenir à l'énoncé

1. Deux points d'abscisse $\dfrac{1}{2}$: $x = \dfrac{\pi}{3}$ ou $x = \dfrac{5\pi}{3}$.
2. Deux points d'ordonnée $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$: $x = \dfrac{5\pi}{4}$ ou $x = \dfrac{7\pi}{4}$.
3. Le haut et le bas du cercle : $x = \dfrac{\pi}{2}$ ou $x = \dfrac{3\pi}{2}$.
4. $\cos x = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, donc $x = \dfrac{5\pi}{6}$ ou $x = \dfrac{7\pi}{6}$.
5. Un seul point, le haut du cercle : $x = \dfrac{\pi}{2}$.

Corrigé 10 · Deux conditions à la fois

Revenir à l'énoncé

1. Dans cet intervalle, les réels de cosinus $-\dfrac{1}{2}$ sont $\dfrac{2\pi}{3}$ et $\dfrac{4\pi}{3}$. Seul le premier a un sinus positif : $x = \dfrac{2\pi}{3}$.
2. Dans cet intervalle, les réels de sinus $\dfrac{1}{2}$ sont $\dfrac{\pi}{6}$ et $\dfrac{5\pi}{6}$. Seul le second a un cosinus négatif : $x = \dfrac{5\pi}{6}$.
3. Non : on aurait $\cos^2 x + \sin^2 x = \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{2}$, alors que cette somme vaut toujours 1.
4. Les points d'abscisse au moins $\dfrac{1}{2}$ forment l'arc allant de $-\dfrac{\pi}{3}$ à $\dfrac{\pi}{3}$: $x \in \left[-\dfrac{\pi}{3} ; \dfrac{\pi}{3}\right]$.

Corrigé 11 · Une équation du second degré en cosinus

Revenir à l'énoncé

1. $\Delta = 9 - 8 = 1$, donc $X = \dfrac{3 - 1}{4} = \dfrac{1}{2}$ ou $X = \dfrac{3 + 1}{4} = 1$.
2. Un cosinus prend ses valeurs entre -1 et 1, et $\dfrac{1}{2}$ comme 1 sont dans cet intervalle.
3. $\cos x = 1$ donne $x = 0$. $\cos x = \dfrac{1}{2}$ donne $x = \dfrac{\pi}{3}$ ou $x = \dfrac{5\pi}{3}$. Les solutions sont 0, $\dfrac{\pi}{3}$ et $\dfrac{5\pi}{3}$.

Corrigé 12 · La marée dans un port

Revenir à l'énoncé

1. $h(0) = 6 + 4\cos 0 = 10$ m, $h(3) = 6 + 4\cos\dfrac{\pi}{2} = 6$ m, $h(6) = 6 + 4\cos\pi = 2$ m.
2. Pour tout réel, le cosinus est compris entre -1 et 1, donc $h(t)$ est compris entre $6 - 4 = 2$ et $6 + 4 = 10$.
3. $h(2) = 6 + 4\cos\dfrac{\pi}{3} = 8$ m et $h(10) = 6 + 4\cos\dfrac{5\pi}{3} = 8$ m.
4. Il faut $\cos\dfrac{\pi t}{6} \geqslant \dfrac{1}{2}$. Sur le cercle, avec $\dfrac{\pi t}{6}$ entre 0 et 2π, cela donne $t \leqslant 2$ ou $t \geqslant 10$. Le bateau peut entrer les deux premières heures et les deux dernières.

Corrigé 13 · Approcher π à la manière d'Archimède

Revenir à l'énoncé

1. Avec A comme point d'abscisse 1 du cercle, B est l'image de α, et BH est son ordonnée : $BH = \sin\alpha$. L'aire vaut $\dfrac{OA \times BH}{2} = \dfrac{1}{2}\sin\alpha$.
2. Les n triangles se partagent le tour complet : $\alpha = \dfrac{2\pi}{n}$. Donc $\mathcal{A}_n = n \times \dfrac{1}{2}\sin\dfrac{2\pi}{n} = \dfrac{n}{2}\sin\dfrac{2\pi}{n}$.
3. $\mathcal{A}_6 = 3\sin\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{3\sqrt{3}}{2} \approx 2{,}598$. $\mathcal{A}_8 = 4\sin\dfrac{\pi}{4} = 2\sqrt{2} \approx 2{,}828$. $\mathcal{A}_{12} = 6\sin\dfrac{\pi}{6} = 3$.
4. $\mathcal{A}_{96} \approx 3{,}139$ et $\mathcal{A}_{384} \approx 3{,}141$. Le polygone est à l'intérieur du disque, d'aire π : ces nombres sont des valeurs approchées de π, par défaut. La calculatrice utilise déjà π : Archimède, lui, doublait le nombre de côtés à partir de l'hexagone.

Les exercices corrigés en ligne de Première reprennent les angles associés. Les formules de trigonométrie sont réunies dans une page de référence.