FICHE D'EXERCICES CORRIGÉS

Suites numériques

1re · Générer, sommer, étudier, modéliser

Le cours de Première sur les suites numériques présente les modes de génération, le sens de variation et la notion de limite. Cette fiche part du calcul des termes, démontre les formules des suites arithmétiques et géométriques, puis modélise des situations jusqu'à un algorithme de seuil.

Générer une suite

Exercice 1 — Formule explicite ou récurrence

Corrigé p. 4 →

On définit, pour tout entier naturel n, $u_n = 3n - 2$, ainsi que la suite (v_n) par $v_0 = 2$ et $v_{n+1} = 2v_n - 1$.

1. Calculer u_0, u_1, u_2 et u_{10}.
2. Calculer v_1, v_2, v_3 et v_4.
3. Peut-on calculer v_{10} aussi directement que u_{10} ? Expliquer.
4. Conjecturer une formule explicite de v_n, puis vérifier qu'elle respecte la relation de récurrence.

Exercice 2 — Des carrés d'allumettes

Corrigé p. 4 →

On aligne des carrés formés d'allumettes, comme sur la figure. On note a_n le nombre d'allumettes nécessaires pour n carrés, avec $n \geqslant 1$.



3 carrés

1. Donner a_1, a_2 et a_3.
2. Exprimer a_{n+1} en fonction de a_n. Justifier.
3. En déduire une formule explicite de a_n.
4. Avec une boîte de 100 allumettes, combien de carrés peut-on aligner au maximum ?

Suites arithmétiques

Exercice 3 — Reconnaître une suite arithmétique

Corrigé p. 4 →

Pour chaque suite définie sur $\mathbb{N}$, dire si elle est arithmétique. Si oui, donner sa raison et son premier terme.

1. $u_n = 5 - 2n$
2. $v_n = n^2$
3. $w_0 = 7$ et $w_{n+1} = w_n + 0{,}5$
4. $t_n = (n+1)^2 - n^2$

Exercice 4 — La somme des premiers entiers

Corrigé p. 5 →

On note $S_n = 1 + 2 + \cdots + n$ pour tout entier $n \geqslant 1$.

1. Écrire S_{100} dans l'ordre croissant puis dans l'ordre décroissant, et additionner terme à terme. En déduire S_{100}.
2. Démontrer de la même façon que $S_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.
3. Calculer la somme des nombres pairs de 2 à 200.
4. Calculer $3 + 7 + 11 + \cdots + 99$.

Indice. Écrire la somme une deuxième fois, dans l'ordre inverse, sous la première.

Exercice 5 — Un abonnement qui augmente

Corrigé p. 5 →

Un abonnement coûte 40 € en janvier 2027, puis son prix augmente de $1{,}50$ € chaque mois. On note a_n le prix, en euros, n mois après janvier 2027.

1. Exprimer a_n en fonction de n. Quelle est la nature de la suite (a_n) ?
2. Quel est le prix en décembre 2027 ?
3. À partir de quel mois le prix dépasse-t-il 60 € ?
4. Calculer le montant total payé de janvier à décembre 2027.

Suites géométriques

Exercice 6 — Reconnaître une suite géométrique

Corrigé p. 5 →

Les suites suivantes sont définies sur $\mathbb{N}$.

1. La suite (u_n) est géométrique de premier terme $u_0 = 3$ et de raison 2. Calculer u_5 et exprimer u_n en fonction de n.
2. Montrer que la suite définie par $v_n = 5 \times 0{,}8^n$ est géométrique.
3. La suite définie par $w_n = 2^n + 1$ est-elle géométrique ?
4. Une suite géométrique a pour termes $u_2 = 12$ et $u_4 = 48$, et tous ses termes sont positifs. Trouver sa raison et u_0.

Exercice 7 — Deux placements

Corrigé p. 5 →

On hésite entre deux placements de $2\,000$ € au 1er janvier 2027. Placement A : les intérêts de 3 % par an s'ajoutent au capital. Placement B : on gagne 60 € chaque année. On note A_n et B_n les capitaux, en euros, après n années.

1. Exprimer A_n et B_n en fonction de n, en précisant la nature de chaque suite.
2. Calculer A_{10} et B_{10}, au centime près.
3. Au bout de combien d'années le capital A dépasse-t-il $3\,000$ € ? Et le capital B ?
4. Lequel des deux modèles traduit une croissance exponentielle ? Lequel une croissance linéaire ?

Exercice 8 — Les tours de Hanoï

Corrigé p. 5 →

Pour déplacer une tour de n disques d'un piquet à un autre, en ne bougeant qu'un disque à la fois et sans jamais poser un disque sur un plus petit, il faut au minimum h_n déplacements. On admet que $h_1 = 1$ et $h_{n+1} = 2h_n + 1$.

1. Calculer h_2, h_3 et h_4.
2. On pose $k_n = h_n + 1$. Montrer que la suite (k_n) est géométrique.
3. En déduire h_n en fonction de n.
4. À raison d'un déplacement par seconde, combien d'années faut-il pour une tour de 64 disques ?

Exercice 9 — La somme des termes géométriques

Corrigé p. 6 →

Soit q un réel différent de 1 et n un entier naturel. On pose $S = 1 + q + q^2 + \cdots + q^n$.

1. Calculer $S - qS$, puis montrer que $S = \dfrac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$.
2. Un grain de riz est posé sur la première case d'un échiquier, puis on double à chaque case. Combien de grains sur les 64 cases ?
3. Calculer $T_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} + \cdots + \dfrac{1}{2^n}$.
4. Calculer T_{10} et T_{20} à 10^{-6} près. Vers quel nombre T_n semble-t-il se rapprocher ?

Indice. Écrire qS, puis comparer avec S : presque tous les termes sont communs.

Variations et limites

Exercice 10 — Étudier le sens de variation

Corrigé p. 6 →

Étudier le sens de variation de chaque suite définie sur $\mathbb{N}$.

1. $u_n = n^2 - 6n$, en étudiant le signe de $u_{n+1} - u_n$.
2. $v_n = 3 \times 0{,}5^n$.
3. $w_n = \dfrac{n+1}{n+2}$.
4. $z_n = -2 \times 1{,}1^n$.

Exercice 11 — Conjecturer une limite

Corrigé p. 6 →

À l'aide de la calculatrice, calculer quelques termes de rang élevé et conjecturer le comportement de chaque suite quand n devient grand.

1. $a_n = 2 + \dfrac{1}{n}$, pour $n \geqslant 1$
2. $b_n = 1{,}1^n$
3. $c_n = (-1)^n$
4. $d_n = 50 \times 0{,}9^n$

Exercice 12 | Un algorithme de seuil

Corrigé p. 6 →

Une ville compte $20\,000$ habitants en 2026. Chaque année, $3\,\%$ des habitants partent et 500 personnes arrivent. On note p_n la population n années après 2026, donc $p_0 = 20\,000$ et $p_{n+1} = 0{,}97p_n + 500$. On utilise la fonction Python suivante.

```
def seuil():
    p = 20000
    n = 0
    while p > 18000:
        p = 0.97 * p + 500
        n = n + 1
    return n
```

1. Calculer p_1 et p_2. La suite (p_n) est-elle arithmétique ? géométrique ?
2. Expliquer ce que renvoie la fonction seuil.
3. L'appel seuil() renvoie 31. Interpréter ce résultat.
4. À la calculatrice, calculer p_{100} et p_{200}. Vers quelle valeur la population semble-t-elle se stabiliser ?

Corrigés détaillés

Corrigé 1 · Formule explicite ou récurrence

Revenir à l'énoncé

1. $u_0 = -2$, $u_1 = 1$, $u_2 = 4$ et $u_{10} = 3 \times 10 - 2 = 28$.
2. $v_1 = 2 \times 2 - 1 = 3$, $v_2 = 5$, $v_3 = 9$ et $v_4 = 17$.
3. Non : la relation de récurrence donne un terme à partir du précédent. Pour obtenir v_{10}, il faut calculer tous les termes de v_1 à v_9.
4. Les termes valent $1+1$, $2+1$, $4+1$, $8+1$, $16+1$: on conjecture $v_n = 2^n + 1$. On a bien $v_0 = 2^0 + 1 = 2$, et $2(2^n + 1) - 1 = 2^{n+1} + 1$, qui est la formule au rang $n + 1$.

Corrigé 2 · Des carrés d'allumettes

Revenir à l'énoncé

1. $a_1 = 4$, $a_2 = 7$ et $a_3 = 10$.
2. Un carré ajouté partage un côté avec le précédent : il demande 3 allumettes de plus. Donc $a_{n+1} = a_n + 3$.
3. (a_n) est arithmétique de raison 3 et de premier terme $a_1 = 4$: $a_n = 4 + 3(n-1) = 3n + 1$.
4. Il faut $3n + 1 \leqslant 100$, soit $n \leqslant 33$. Pour $n = 33$, on utilise exactement 100 allumettes : on aligne au maximum 33 carrés.

Corrigé 3 · Reconnaître une suite arithmétique

Revenir à l'énoncé

1. $u_{n+1} - u_n = -2$ pour tout n : arithmétique de raison -2 et de premier terme 5.
2. $v_1 - v_0 = 1$ et $v_2 - v_1 = 3$: la différence n'est pas constante, la suite n'est pas arithmétique.
3. On ajoute $0{,}5$ à chaque étape : arithmétique de raison $0{,}5$ et de premier terme 7.
4. $t_n = n^2 + 2n + 1 - n^2 = 2n + 1$, donc $t_{n+1} - t_n = 2$: arithmétique de raison 2 et de premier terme 1.

Corrigé 4 · La somme des premiers entiers

Revenir à l'énoncé

1. Chaque colonne $1+100$, $2+99$, … vaut 101, et il y a 100 colonnes : $2S_{100} = 100 \times 101$, donc $S_{100} = 5\,050$.
2. En additionnant $S_n = 1 + 2 + \cdots + n$ et $S_n = n + (n-1) + \cdots + 1$, chacune des n colonnes vaut $n+1$. Donc $2S_n = n(n+1)$ et $S_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.
3. $2 + 4 + \cdots + 200 = 2 \times (1 + 2 + \cdots + 100) = 2 \times 5\,050 = 10\,100$.
4. Ces termes forment une suite arithmétique de raison 4. De 3 à 99, il y a $\dfrac{99-3}{4} + 1 = 25$ termes. La somme vaut $25 \times \dfrac{3+99}{2} = 1\,275$.

Corrigé 5 · Un abonnement qui augmente

Revenir à l'énoncé

1. On ajoute $1{,}5$ chaque mois : (a_n) est arithmétique de raison $1{,}5$ et $a_n = 40 + 1{,}5n$.
2. Décembre 2027 correspond à $n = 11$: $a_{11} = 40 + 16{,}5 = 56{,}5$ €.
3. $40 + 1{,}5n > 60$ donne $n > \dfrac{20}{1{,}5} \approx 13{,}3$, donc $n = 14$: c'est en mars 2028.
4. On additionne 12 termes consécutifs : $12 \times \dfrac{a_0 + a_{11}}{2} = 12 \times \dfrac{40 + 56{,}5}{2} = 579$ €.

Corrigé 6 · Reconnaître une suite géométrique

Revenir à l'énoncé

1. $u_5 = 3 \times 2^5 = 96$ et $u_n = 3 \times 2^n$.
2. $v_{n+1} = 5 \times 0{,}8^{n+1} = 0{,}8 \times v_n$: la suite est géométrique de raison $0{,}8$ et de premier terme 5.
3. $w_0 = 2$, $w_1 = 3$ et $w_2 = 5$. Or $\dfrac{3}{2} \neq \dfrac{5}{3}$: le quotient de deux termes consécutifs n'est pas constant, la suite n'est pas géométrique.
4. $u_4 = u_2 \times q^2$, donc $q^2 = 4$. Les termes sont positifs, donc $q = 2$. Enfin $u_0 = \dfrac{u_2}{q^2} = 3$.

Corrigé 7 · Deux placements

Revenir à l'énoncé

1. Augmenter de 3 %, c'est multiplier par $1{,}03$: $A_n = 2\,000 \times 1{,}03^n$: suite géométrique de raison $1{,}03$ et de premier terme $A_0 = 2\,000$. $B_n = 2\,000 + 60n$: suite arithmétique de raison 60 et de premier terme $B_0 = 2\,000$.
2. $A_{10} \approx 2\,687{,}83$ € et $B_{10} = 2\,600$ €.
3. À la calculatrice, $A_{13} \approx 2\,937{,}07$ et $A_{14} \approx 3\,025{,}18$: il faut 14 ans. Pour B, $2\,000 + 60n > 3\,000$ donne $n > 16{,}7$: il faut 17 ans.
4. A : on multiplie par le même nombre chaque année, croissance exponentielle. B : on ajoute la même somme, croissance linéaire.

Corrigé 8 · Les tours de Hanoï

Revenir à l'énoncé

1. $h_2 = 3$, $h_3 = 7$ et $h_4 = 15$.
2. $k_{n+1} = h_{n+1} + 1 = 2h_n + 2 = 2(h_n + 1) = 2k_n$: la suite (k_n) est géométrique de raison 2, de premier terme $k_1 = 2$.
3. $k_n = 2 \times 2^{n-1} = 2^n$, donc $h_n = 2^n - 1$.
4. $h_{64} = 2^{64} - 1 \approx 1{,}8 \times 10^{19}$ secondes. Une année compte environ $3{,}16 \times 10^7$ secondes : il faut environ $5{,}8 \times 10^{11}$ années.

Corrigé 9 · La somme des termes géométriques

Revenir à l'énoncé

1. Tous les termes de q à q^n se retrouvent dans S et dans qS, donc $S - qS = 1 - q^{n+1}$. Ainsi $S(1-q) = 1 - q^{n+1}$, et comme $q \neq 1$, $S = \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$.

2. La case k porte 2^{k-1} grains. Le total vaut $1 + 2 + \cdots + 2^{63} = \dfrac{1-2^{64}}{1-2} = 2^{64} - 1$, soit environ $1{,}8 \times 10^{19}$ grains.

3. C'est la somme avec $q = \dfrac{1}{2}$: $T_n = \dfrac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}} = 2 - \dfrac{1}{2^n}$.

4. $T_{10} \approx 1{,}999\,023$ et $T_{20} \approx 1{,}999\,999$. On conjecture que T_n se rapproche de 2 : il manque $\dfrac{1}{2^n}$, qui devient aussi petit que l'on veut.

Corrigé 10 · Étudier le sens de variation

Revenir à l'énoncé

1. $u_{n+1} - u_n = (n+1)^2 - 6(n+1) - n^2 + 6n = 2n - 5$. Ce nombre est négatif pour $n \leqslant 2$ et positif pour $n \geqslant 3$: la suite décroît de u_0 à $u_3 = -9$, puis croît à partir du rang 3 : la suite (u_n) n'est donc pas monotone.

2. $v_{n+1} - v_n = 3 \times 0{,}5^n \times (0{,}5 - 1) = -1{,}5 \times 0{,}5^n < 0$: la suite est strictement décroissante.

3. $w_{n+1} - w_n = \dfrac{n+2}{n+3} - \dfrac{n+1}{n+2} = \dfrac{(n+2)^2 - (n+1)(n+3)}{(n+2)(n+3)} = \dfrac{1}{(n+2)(n+3)} > 0$: la suite est strictement croissante.

4. $z_{n+1} - z_n = -2 \times 1{,}1^n \times (1{,}1 - 1) = -0{,}2 \times 1{,}1^n < 0$: la suite est strictement décroissante.

Corrigé 11 · Conjecturer une limite

Revenir à l'énoncé

1. $a_{1000} = 2{,}001$: a_n semble se rapprocher de 2.

2. $b_{100} \approx 13\,781$ et $b_{200} \approx 1{,}9 \times 10^8$: b_n semble dépasser tout nombre : la suite semble tendre vers $+\infty$.

3. Les termes valent alternativement 1 et -1 : la suite ne se rapproche d'aucun nombre, elle semble n'avoir aucune limite.

4. $d_{100} \approx 0{,}0013$: d_n semble se rapprocher de 0.

Corrigé 12 · Un algorithme de seuil

Revenir à l'énoncé

1. $p_1 = 0{,}97 \times 20\,000 + 500 = 19\,900$ et $p_2 = 19\,803$. Les différences valent -100 puis -97, les quotients $0{,}995$ puis environ $0{,}9951$: la suite n'est ni arithmétique ni géométrique.

2. La boucle calcule les termes tant que la population dépasse $18\,000$: la fonction renvoie le premier rang n pour lequel $p_n \leqslant 18\,000$.

3. La population passe pour la première fois à $18\,000$ habitants ou moins 31 ans après 2026, c'est-à-dire en 2057.

4. $p_{100} \approx 16\,825$ et $p_{200} \approx 16\,674$. La population semble se stabiliser vers $16\,667$ habitants environ.

Pour continuer : les exercices en ligne de Première, puis les suites arithmétiques et géométriques.