FICHE D'EXERCICES CORRIGÉS

Équations du second degré

1re · Résoudre, factoriser, étudier le signe

Le cours sur le second degré en Première présente les trois formes du trinôme. Cette fiche commence par le choix de la méthode, démontre la formule des racines, puis passe au signe, aux paramètres et aux problèmes.

Résoudre en choisissant la méthode

Exercice 1 — Choisir avant de calculer

Corrigé p. 4 →

Le discriminant n'est pas toujours le plus rapide. Pour chaque équation, nommer la méthode la plus adaptée, puis résoudre dans $\mathbb{R}$.

1. $7x^2 + 21x = 0$
2. $(3x - 1)^2 = 25$
3. $x^2 - 10x + 25 = 0$
4. $3x^2 - 7x + 2 = 0$
5. $2x^2 - 3x + 5 = 0$
6. $x^2 - x - 12 = 0$

Exercice 2 — Six trinômes à factoriser

Corrigé p. 4 →

Factoriser chaque trinôme dans $\mathbb{R}$ lorsque c'est possible, en changeant de stratégie.

1. $3x^2 - 2x - 1$, après avoir repéré une racine évidente.
2. $x^2 - 9x + 14$, sans calculer le discriminant.
3. $4x^2 - 20x + 25$
4. $2x^2 + 5x - 3$
5. $x^2 - 2x - 1$
6. $2x^2 + 3x + 4$

Exercice 3 — Corriger une copie

Corrigé p. 4 →

Pour résoudre $-x^2 + 3x + 4 = 0$, Léa écrit : $\Delta = 9 + 16 = 25$, donc $x_1 = \dfrac{-3-5}{2} = -4$ et $x_2 = \dfrac{-3+5}{2} = 1$.

1. Remplacer x par 1 dans l'équation. Que peut-on conclure ?
2. Repérer l'erreur de Léa.
3. Écrire les solutions correctes.
4. Contrôler le résultat avec la somme et le produit des racines.

Comprendre les racines

Exercice 4 — Démontrer la formule des racines

Corrigé p. 4 →

Soit a, b, c trois réels avec $a \neq 0$, et $\Delta = b^2 - 4ac$. On résout $ax^2 + bx + c = 0$.

1. Montrer que $ax^2 + bx + c = a\left[\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{\Delta}{4a^2}\right]$.
2. On suppose $\Delta < 0$. Justifier que l'équation n'a pas de solution.
3. On suppose $\Delta = 0$. Déterminer l'unique solution.
4. On suppose $\Delta > 0$. Factoriser le crochet avec $A^2 - B^2$, puis retrouver les deux formules des racines.

Exercice 5 — Des rectangles, une somme et un produit

Corrigé p. 5 →

Si deux réels u et v ont pour somme s et pour produit p, que peut-on dire du trinôme $x^2 - sx + p$?

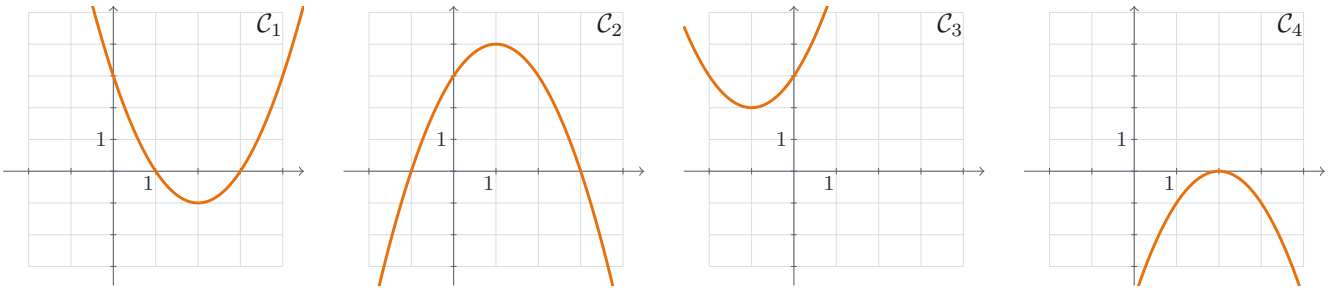
1. Développer $(x - u)(x - v)$ et répondre à la question posée.
2. Un rectangle a pour périmètre 34 cm et pour aire 60 cm². Déterminer ses dimensions.
3. Existe-t-il un rectangle de périmètre 20 cm et d'aire 30 cm² ?
4. Quelle est la plus grande aire possible pour un rectangle de périmètre 20 cm ?

Lire et exploiter le signe

Exercice 6 — Associer quatre paraboles

Corrigé p. 5 →

Les courbes ci-dessous représentent, dans le désordre, les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :
$p(x) = -x^2 + 4x - 4$, $q(x) = x^2 + 2x + 3$, $r(x) = -x^2 + 2x + 3$ et $s(x) = x^2 - 4x + 3$.



1. Pour chaque courbe, donner le signe de a et celui de Δ, sans calcul.
2. Associer chaque courbe à sa fonction, en justifiant.
3. Résoudre graphiquement $r(x) \geqslant 0$.
4. Écrire $q(x)$ sous forme canonique et en déduire que $q(x) > 0$ pour tout réel x.

Exercice 7 — Quatre inéquations

Corrigé p. 5 →

Résoudre dans $\mathbb{R}$. On cherche d'abord les racines, puis on utilise le signe de a.

1. $x^2 - x - 6 \leqslant 0$
2. $-3x^2 + 5x + 2 < 0$
3. $x^2 + 4x + 4 > 0$
4. $2x^2 - x + 4 \leqslant 0$

Exercice 8 — Position de deux paraboles

Corrigé p. 5 →

On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + x - 2$ et $g(x) = -x^2 + 3x + 2$.

1. Déterminer les points d'intersection de leurs courbes.
2. Factoriser $g(x) - f(x)$, puis étudier la position relative des deux courbes.
3. Sur $[-1\,;\,2]$, pour quelle valeur de x l'écart vertical $g(x) - f(x)$ est-il maximal ? Donner cet écart.

Paramètres et problèmes

Exercice 9 — Un paramètre devant x^2

Corrigé p. 5 →

Pour un réel m, on considère l'équation (E_m) : $(m+1)x^2 - 4x + 2 = 0$.

1. Résoudre l'équation pour $m = -1$.
2. Pour $m \neq -1$, montrer que $\Delta = 8(1 - m)$.
3. Donner le nombre de solutions selon les valeurs de m.
4. Pour quelle valeur de m le nombre 2 est-il solution ? Trouver alors l'autre solution sans calculer Δ.

Indice. Le coefficient de x^2 peut s'annuler : ce cas se traite à part.

Exercice 10 — Deux imprimantes

Corrigé p. 6 →

Deux imprimantes travaillent à vitesse constante. L'imprimante A réalise seule un tirage en x heures. L'imprimante B met 3 heures de plus. Ensemble, elles terminent ce tirage en 2 heures.

1. Justifier que $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x+3} = \dfrac{1}{2}$, avec $x > 0$.
2. En déduire que $x^2 - x - 6 = 0$.
3. Résoudre cette équation et donner la durée de chaque imprimante.
4. Contrôler le résultat dans l'équation de la question 1.

Indice. En une heure, l'imprimante A réalise $\dfrac{1}{x}$ du tirage.

Exercice 11 — Le cadre autour de la photo

Corrigé p. 6 →

Une photo de 30 cm sur 20 cm reçoit une bordure de largeur constante x, en cm. L'aire totale, bordure comprise, doit être le double de l'aire de la photo.

1. Exprimer les dimensions totales en fonction de x, puis écrire l'équation vérifiée par x.
2. Montrer que cette équation équivaut à $x^2 + 25x - 150 = 0$.
3. Déterminer la largeur de la bordure.
4. Vérifier le résultat.

Exercice 12 — Trois formes pour une trajectoire

Corrigé p. 6 →

Une balle est lancée depuis un toit. Sa hauteur, en mètres, est $h(t) = -5t^2 + 20t + 25$, où $t \geqslant 0$ est le temps, en secondes, écoulé depuis le lancer.

1. Écrire $h(t)$ sous forme canonique. Quelle hauteur maximale la balle atteint-elle, et à quel instant ?
2. Factoriser $h(t)$, puis déterminer l'instant où la balle touche le sol.
3. Pendant combien de temps la balle est-elle à au moins 40 m de hauteur ?
4. Retrouver l'instant du maximum avec la fonction dérivée.

Corrigés détaillés

Corrigé 1 · Choisir avant de calculer

Revenir à l'énoncé

1. Facteur commun : $7x(x+3)=0$. Un produit est nul si et seulement si l'un au moins de ses facteurs l'est, donc $S=\{-3\,;0\}$.
2. Racine d'un carré : $3x-1=5$ ou $3x-1=-5$, donc $x=2$ ou $x=-\dfrac{4}{3}$. Ainsi $S=\left\{-\dfrac{4}{3}\,;2\right\}$.
3. Identité remarquable : $(x-5)^2=0$, donc $S=\{5\}$.
4. Discriminant : $\Delta=49-24=25$. Les racines sont $\dfrac{7-5}{6}=\dfrac{1}{3}$ et $\dfrac{7+5}{6}=2$, donc $S=\left\{\dfrac{1}{3}\,;2\right\}$.
5. Discriminant : $\Delta=9-40=-31$. Comme $\Delta<0$, il n'y a pas de solution réelle : $S=\emptyset$.
6. Somme et produit : $4+(-3)=1$ et $4\times(-3)=-12$. Donc $x^2-x-12=(x-4)(x+3)$ et $S=\{-3\,;4\}$.

Corrigé 2 · Six trinômes à factoriser

Revenir à l'énoncé

1. 1 est racine, car $3-2-1=0$. Le produit des racines vaut $-\dfrac{1}{3}$, donc l'autre racine est $-\dfrac{1}{3}$. Ainsi $3x^2-2x-1=(x-1)(3x+1)$.
2. $2+7=9$ et $2\times 7=14$, donc $x^2-9x+14=(x-2)(x-7)$.
3. C'est un carré parfait : $4x^2-20x+25=(2x-5)^2$.
4. $\Delta=25+24=49$. Les racines sont $\dfrac{-5+7}{4}=\dfrac{1}{2}$ et $\dfrac{-5-7}{4}=-3$. Donc $2x^2+5x-3=(2x-1)(x+3)$.
5. $\Delta=4+4=8$ et $\sqrt{8}=2\sqrt{2}$. Les racines sont $1-\sqrt{2}$ et $1+\sqrt{2}$, donc $x^2-2x-1=(x-1+\sqrt{2})(x-1-\sqrt{2})$.
6. $\Delta=9-32=-23$. Le trinôme n'a pas de racine réelle : il ne se factorise pas dans $\mathbb{R}$.

Corrigé 3 · Corriger une copie

Revenir à l'énoncé

1. $-1+3+4=6$, qui n'est pas nul : 1 n'est pas solution, la copie contient donc une erreur.
2. Le discriminant est juste. L'erreur est au dénominateur : avec $a=-1$, il faut diviser par $2a=-2$, et non par 2.
3. $x_1=\dfrac{-3-5}{-2}=4$ et $x_2=\dfrac{-3+5}{-2}=-1$, donc $S=\{-1\,;4\}$.
4. La somme vaut 3 et $-\dfrac{b}{a}=3$. Le produit vaut -4 et $\dfrac{c}{a}=-4$. Les deux contrôles concordent.

Corrigé 4 · Démontrer la formule des racines

Revenir à l'énoncé

1. En factorisant par a : $ax^2+bx+c=a\left[x^2+\dfrac{b}{a}x+\dfrac{c}{a}\right]$. Or $x^2+\dfrac{b}{a}x=\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2-\dfrac{b^2}{4a^2}$. Il reste $-\dfrac{b^2}{4a^2}+\dfrac{4ac}{4a^2}=-\dfrac{\Delta}{4a^2}$.
2. Le carré est positif ou nul et $-\dfrac{\Delta}{4a^2}>0$: le crochet est strictement positif. Comme $a\neq 0$, le trinôme ne s'annule jamais.
3. Le trinôme vaut $a\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2$. Il s'annule seulement pour $x=-\dfrac{b}{2a}$.
4. $\dfrac{\Delta}{4a^2}=\left(\dfrac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2$, donc le crochet vaut $\left(x+\dfrac{b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x+\dfrac{b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right)$. Comme $a\neq 0$, l'équation équivaut à ce produit nul. Les solutions sont $\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$, distinctes car $\sqrt{\Delta}\neq 0$.

Corrigé 5 · Des rectangles, une somme et un produit

Revenir à l'énoncé

1. $(x-u)(x-v) = x^2 - (u+v)x + uv = x^2 - sx + p$. Les réels u et v sont donc les racines de ce trinôme.
2. $2(u+v) = 34$ donne $s = 17$, et $p = 60$. Pour $x^2 - 17x + 60$, $\Delta = 289 - 240 = 49$, donc les racines sont $\dfrac{17-7}{2} = 5$ et $\dfrac{17+7}{2} = 12$. Le rectangle mesure 12 cm sur 5 cm.
3. $2(u+v) = 20$ donne $s = 10$, et $p = 30$. Pour $x^2 - 10x + 30$, $\Delta = 100 - 120 = -20$: pas de racine réelle, donc un tel rectangle n'existe pas.
4. Avec $s = 10$ et une aire p, il faut $\Delta = 100 - 4p \geqslant 0$, soit $p \leqslant 25$. L'aire maximale vaut donc 25 cm², atteinte par le carré de côté 5 cm.

Corrigé 6 · Associer quatre paraboles

Revenir à l'énoncé

1. $\mathcal{C}_1 : a > 0$, $\Delta > 0$. $\mathcal{C}_2 : a < 0$, $\Delta > 0$. $\mathcal{C}_3 : a > 0$, $\Delta < 0$. $\mathcal{C}_4 : a < 0$, $\Delta = 0$.
2. Le signe de a sépare q et s de p et r. Comme $\Delta = -8$ pour q et $\Delta = 4$ pour s, $\mathcal{C}_3$ est celle de q et $\mathcal{C}_1$ celle de s. Comme $\Delta = 0$ pour p et $\Delta = 16$ pour r, $\mathcal{C}_4$ est celle de p et $\mathcal{C}_2$ celle de r.
3. $\mathcal{C}_2$ est sur l'axe des abscisses ou au-dessus entre ses points d'abscisses -1 et 3 : $S = [-1\,;\,3]$.
4. $q(x) = (x+1)^2 + 2$. Un carré est positif ou nul, donc $q(x) \geqslant 2 > 0$ pour tout réel x.

Corrigé 7 · Quatre inéquations

Revenir à l'énoncé

1. Racines -2 et 3 (somme 1, produit -6). Comme $a > 0$, il est négatif ou nul entre elles : $S = [-2\,;\,3]$.
2. $\Delta = 25 + 24 = 49$, racines $\dfrac{-5+7}{-6} = -\dfrac{1}{3}$ et $\dfrac{-5-7}{-6} = 2$. Comme $a < 0$, le trinôme est strictement négatif à l'extérieur des racines : $S =]-\infty\,;\,-\dfrac{1}{3}[\cup]2\,;\,+\infty[$.
3. $x^2 + 4x + 4 = (x+2)^2$ est strictement positif sauf en -2 : $S =]-\infty\,;\,-2[\cup]-2\,;\,+\infty[$.
4. $\Delta = 1 - 32 = -31$. Le trinôme garde le signe de $a = 2$: il est toujours strictement positif, donc $S = \emptyset$.

Corrigé 8 · Position de deux paraboles

Revenir à l'énoncé

1. $f(x) = g(x)$ équivaut à $2x^2 - 2x - 4 = 0$, soit $x^2 - x - 2 = 0$, de racines -1 et 2. Les points sont $(-1\,;-2)$ et $(2\,;4)$.
2. $g(x) - f(x) = -2x^2 + 2x + 4 = -2(x+1)(x-2)$. Comme $a = -2 < 0$, cette expression est strictement positive entre les racines : la courbe de g est au-dessus sur $]-1\,;\,2[$ et en dessous à l'extérieur.
3. $g(x) - f(x) = -2\left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{9}{2}$. Comme $-2\left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2 \leqslant 0$, l'écart est au plus $\dfrac{9}{2}$. Cette valeur est atteinte pour $x = \dfrac{1}{2}$, qui appartient à l'intervalle.

Corrigé 9 · Un paramètre devant x^2

Revenir à l'énoncé

1. L'équation devient $-4x + 2 = 0$, du premier degré, et $x = \dfrac{1}{2}$.
2. $\Delta = 16 - 4 \times (m+1) \times 2 = 16 - 8m - 8 = 8 - 8m = 8(1-m)$.
3. Si $m < 1$ et $m \neq -1$: deux solutions. Si $m = -1$: une solution (question 1). Si $m = 1$: une solution, $x = 1$. Si $m > 1$: aucune solution.
4. $4(m+1) - 8 + 2 = 0$ donne $m = \dfrac{1}{2}$. Le produit des solutions vaut $\dfrac{2}{m+1} = \dfrac{4}{3}$, d'où l'autre solution $\dfrac{2}{3}$.

Corrigé 10 · Deux imprimantes

Revenir à l'énoncé

1. En une heure, A réalise $\frac{1}{x}$ du tirage et B en réalise $\frac{1}{x+3}$. Ensemble, elles en réalisent $\frac{1}{2}$.
2. En multipliant par $2x(x+3)$, non nul : $2(x+3)+2x = x(x+3)$, soit $4x+6 = x^2+3x$, donc $x^2-x-6=0$.
3. Les racines sont 3 et -2 (somme 1, produit -6). Comme $x>0$, on a $x=3$: A met 3 h, B met 6 h.
4. $\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{2}{6}+\frac{1}{6}=\frac{1}{2}$: le résultat convient.

Corrigé 11 · Le cadre autour de la photo

Revenir à l'énoncé

1. Les dimensions sont $30+2x$ et $20+2x$. L'aire de la photo vaut 600 cm², donc $(30+2x)(20+2x)=1200$.
2. $600+100x+4x^2=1200$, soit $4x^2+100x-600=0$. En divisant par 4 : $x^2+25x-150=0$.
3. $\Delta = 625+600 = 1225 = 35^2$. Les racines sont $\frac{-25+35}{2}=5$ et $\frac{-25-35}{2}=-30$. Une largeur est positive : la bordure mesure 5 cm.
4. Le cadre mesure 40 cm sur 30 cm, soit 1200 cm², le double de 600 cm².

Corrigé 12 · Trois formes pour une trajectoire

Revenir à l'énoncé

1. $h(t) = -5(t^2-4t)+25 = -5\left[(t-2)^2-4\right]+25 = -5(t-2)^2+45$. Le maximum est 45 m, atteint à $t=2$ s.
2. $h(t) = -5(t^2-4t-5) = -5(t-5)(t+1)$. Comme $t\geqslant 0$, la balle touche le sol à $t=5$ s.
3. $h(t)\geqslant 40$ équivaut à $t^2-4t+3\leqslant 0$, soit $(t-1)(t-3)\leqslant 0$, donc $t\in[1\,;\,3]$. Cela dure 2 s.
4. Avec la dérivation, $h'(t)=-10t+20$. Cette dérivée est positive avant $t=2$ et négative après, donc h est maximale à $t=2$.

La résolution d'une équation du second degré reprend chaque cas pas à pas. Les exercices corrigés en ligne proposent d'autres situations.