FICHE D'EXERCICES CORRIGÉS

Probabilités conditionnelles

1re · Tableaux, arbres, indépendance, répétitions

Le cours de Première sur les probabilités conditionnelles présente l'indépendance, les probabilités totales et les répétitions. Cette fiche suit le raisonnement d'un élève : lire un tableau, construire un arbre, inverser un conditionnement, tester l'indépendance, répéter une épreuve, puis simuler.

Lire et traduire

Exercice 1 — Les retards de 500 trajets

Corrigé p. 5 →

Le tableau donne le bilan de 500 trajets. On choisit un trajet au hasard. On note B : « en bus », T : « en train », V : « à vélo » et R : « en retard ».

	Bus	Train	Vélo	Total
En retard	48	27	5	80
À l'heure	192	153	75	420
Total	240	180	80	500

1. Calculer $P(R)$ et $P(B \cap R)$.
2. Calculer $P_B(R)$, puis expliquer ce que signifie ce nombre.
3. Calculer $P_R(B)$. Comparer à $P_B(R)$ et expliquer.
4. Quel moyen de transport est le plus fiable ? Justifier.
5. Les événements T et R sont-ils indépendants ?

Exercice 2 — Traduire des phrases

Corrigé p. 5 →

Dans un restaurant, on choisit un client au hasard. On note D : « il prend un dessert » et C : « il prend un café ». Traduire chaque phrase par une égalité.

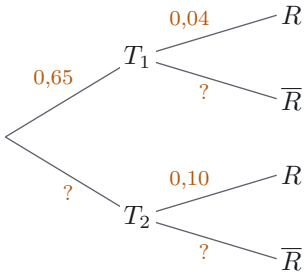
1. $30\,\%$ des clients qui prennent un dessert prennent aussi un café.
2. Parmi les clients qui prennent un café, $40\,\%$ ont pris un dessert.
3. $12\,\%$ des clients prennent un dessert et un café.
4. Calculer $P(D)$ et $P(C)$.

Construire un arbre

Exercice 3 — Deux transporteurs

Corrigé p. 5 →

Un site de vente confie ses colis à deux transporteurs T_1 et T_2. On choisit un colis au hasard et on note R : « le colis arrive en retard ». L'arbre donne les premières valeurs.



1. Compléter l'arbre.
2. Calculer $P(T_1 \cap R)$ et $P(T_2 \cap R)$.
3. En déduire $P(R)$.
4. Un colis arrive en retard. Calculer la probabilité qu'il ait été confié à T_2, au centième.
5. Comparer $P_R(T_2)$ à $P(T_2)$ et interpréter.

Exercice 4 — Un match et trois météos

Corrigé p. 5 →

Pour un match en plein air, la météo est soleil avec la probabilité $0{,}6$, pluie avec $0{,}3$, neige avec $0{,}1$. Le match est maintenu avec la probabilité $0{,}98$ par soleil, $0{,}8$ par pluie et $0{,}3$ par neige.

1. Représenter la situation par un arbre, avec trois branches issues de la racine. Pourquoi peut-on utiliser la formule des probabilités totales ?
2. Calculer la probabilité que le match soit maintenu.
3. Le match est annulé. Quelle est la probabilité qu'il neige, au centième ?
4. La neige est rare. Comment expliquer le résultat de la question 3 ?

Indice. Trois événements qui se partagent l'univers donnent trois branches issues de la racine.

Exercice 5 — Retrouver une branche manquante

Corrigé p. 6 →

On sait que $P(A) = 0{,}4$, $P_A(B) = 0{,}3$ et $P(B) = 0{,}42$.

1. Calculer $P(A \cap B)$.
2. En utilisant la formule des probabilités totales, calculer $P_{\overline{A}}(B)$.
3. Les événements A et B sont-ils indépendants ?
4. On oublie $P(B) = 0{,}42$ et on garde les deux autres valeurs. Quelle valeur de $P_{\overline{A}}(B)$ rendrait A et B indépendants ?

Inverser le conditionnement

Exercice 6 — Le portique antivol

Corrigé p. 6 →

Dans un magasin, $1\,\%$ des clients sortent avec un article non payé. Le portique sonne pour $98\,\%$ de ces clients, et pour $3\,\%$ des autres clients. On choisit un client au hasard. On note V : « le client a un article non payé » et S : « le portique sonne ».

1. Sur $10\,000$ clients, combien ont un article non payé ? Parmi eux, pour combien le portique sonne-t-il ?
2. Parmi les autres clients, pour combien le portique sonne-t-il ?
3. En déduire $P(S)$ et $P_S(V)$, au centième.
4. Le portique a sonné. Faut-il conclure que le client a un article non payé ? Comparer $P_V(S)$ et $P_S(V)$.

Reconnaître l'indépendance

Exercice 7 — Un dé et trois événements

Corrigé p. 6 →

On lance un dé équilibré à six faces. On note A : « pair », B : « au plus 4 » et C : « au moins 4 ».

1. Montrer que A et B sont indépendants.
2. Les événements A et C sont-ils indépendants ?
3. Les événements A et B sont-ils incompatibles ?
4. Montrer que deux événements E et F incompatibles, de probabilités non nulles, ne sont jamais indépendants.

Exercice 8 — Deux capteurs indépendants

Corrigé p. 6 →

Soient A et B deux événements indépendants.

1. Montrer que A et $\overline{B}$ sont indépendants.
2. Une alarme possède deux capteurs qui fonctionnent indépendamment, avec les probabilités $0{,}9$ pour le premier et $0{,}95$ pour le second. Calculer la probabilité que les deux fonctionnent.
3. Calculer la probabilité que le premier fonctionne et pas le second.
4. Calculer la probabilité qu'au moins un capteur fonctionne.

Répéter une épreuve

Exercice 9 — Avec ou sans remise

Corrigé p. 6 →

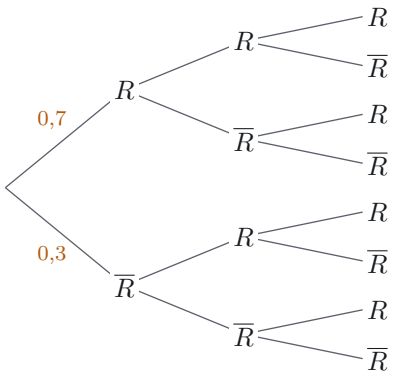
Une urne contient 3 boules rouges et 2 boules bleues. On tire au hasard deux boules l'une après l'autre.

1. Le tirage est fait avec remise. Pourquoi les deux tirages sont-ils indépendants ? Représenter la situation par un arbre, puis calculer la probabilité d'obtenir deux boules de même couleur.
2. Le tirage est fait sans remise. Calculer la même probabilité.
3. Sans remise, on note R_1 et R_2 les événements « rouge au premier tirage » et « rouge au second ». Calculer $P(R_2)$.
4. Les événements R_1 et R_2 sont-ils indépendants sans remise ?

Exercice 10 — Une série de tirs au but

Corrigé p. 7 →

Une joueuse tire au but. Chaque tir réussit avec la probabilité $0{,}7$, indépendamment des autres. L'arbre représente trois tirs, R désignant une réussite.



1. Calculer la probabilité de réussir les trois tirs.
2. Calculer la probabilité de réussir exactement deux tirs.
3. Calculer la probabilité de réussir au moins un tir.
4. Elle tire une quatrième fois. Calculer la probabilité de réussir exactement trois tirs sur quatre.

Exercice 11 — Un seuil à atteindre

Corrigé p. 7 →

À un jeu, on gagne une partie avec la probabilité $0{,}4$. Les parties sont indépendantes, et on joue au plus quatre parties.

1. Exprimer, pour n parties, la probabilité de ne jamais gagner.
2. Calculer la probabilité de gagner au moins une fois pour n allant de 1 à 4.
3. Combien de parties faut-il pour dépasser $85\,\%$ de chances de gagner au moins une fois ?
4. Théo dit : « En quatre parties à $40\,\%$, je suis sûr de gagner, car $4 \times 40 = 160$. » Expliquer son erreur.

Simuler avec Python

Exercice 12 — Monte-Carlo sous une parabole

Corrigé p. 7 →

La fonction Python donnée choisit au hasard n points dans le carré de sommets $(0\,;0)$, $(1\,;0)$, $(1\,;1)$ et $(0\,;1)$, et compte ceux qui vérifient une condition.

```
from random import random

def estimation(n):
    s = 0
    for i in range(n):
        x = random()
        y = random()
        if y <= x**2:
            s = s + 1
    return s / n
```

1. Quels points du carré sont comptés par la variable s ?
2. Pourquoi le quotient renvoyé approche-t-il l'aire sous la parabole d'équation $y = x^2$ sur $[0\,;1]$?
3. L'appel estimation(100000) renvoie une valeur proche de $0{,}333$. Quelle aire peut-on conjecturer ?
4. Quelles modifications permettent d'estimer π ?

Corrigés détaillés

Corrigé 1 · Les retards de 500 trajets

Revenir à l'énoncé

1. $P(R) = \dfrac{80}{500} = 0{,}16$ et $P(B \cap R) = \dfrac{48}{500} = 0{,}096$.
2. $P_B(R) = \dfrac{48}{240} = 0{,}2$: parmi les trajets en bus, $20\,\%$ sont en retard.
3. $P_R(B) = \dfrac{48}{80} = 0{,}6$: parmi les retards, $60\,\%$ concernent le bus. L'ensemble de référence change : les retards d'un côté, les trajets en bus de l'autre.
4. $P_B(R) = 0{,}2$, $P_T(R) = \dfrac{27}{180} = 0{,}15$ et $P_V(R) = \dfrac{5}{80} = 0{,}0625$. Le vélo a le plus faible taux de retard : c'est le plus fiable.
5. $P_T(R) = 0{,}15$ et $P(R) = 0{,}16$: ces nombres diffèrent, donc T et R ne sont pas indépendants.

Corrigé 2 · Traduire des phrases

Revenir à l'énoncé

1. $P_D(C) = 0{,}3$.
2. $P_C(D) = 0{,}4$.
3. $P(D \cap C) = 0{,}12$.
4. $P(D \cap C) = P(D) \times P_D(C)$ donne $P(D) = \dfrac{0{,}12}{0{,}3} = 0{,}4$. De même, $P(C) = \dfrac{0{,}12}{0{,}4} = 0{,}3$.

Corrigé 3 · Deux transporteurs

Revenir à l'énoncé

1. La somme des probabilités issues d'un même nœud vaut 1. On place $0{,}35$ vers T_2, $0{,}96$ vers $\overline{R}$ sous T_1 et $0{,}90$ vers $\overline{R}$ sous T_2.
2. $P(T_1 \cap R) = 0{,}65 \times 0{,}04 = 0{,}026$ et $P(T_2 \cap R) = 0{,}35 \times 0{,}10 = 0{,}035$.
3. T_1 et T_2 forment une partition, donc $P(R) = 0{,}026 + 0{,}035 = 0{,}061$.
4. $P_R(T_2) = \dfrac{0{,}035}{0{,}061} \approx 0{,}57$.
5. $P(T_2) = 0{,}35$ et $P_R(T_2) \approx 0{,}57$: ce transporteur assure $35\,\%$ des colis, mais environ $57\,\%$ des retards.

Corrigé 4 · Un match et trois météos

Revenir à l'énoncé

1. L'arbre part de la racine vers soleil, pluie et neige ; chacune se divise en maintenu ou annulé, avec $0{,}98$ et $0{,}02$, $0{,}8$ et $0{,}2$, $0{,}3$ et $0{,}7$. Ces trois météos forment une partition de l'univers.
2. $0{,}6 \times 0{,}98 + 0{,}3 \times 0{,}8 + 0{,}1 \times 0{,}3 = 0{,}588 + 0{,}24 + 0{,}03 = 0{,}858$.
3. La probabilité d'annulation vaut $1 - 0{,}858 = 0{,}142$. Celle de neige et annulation vaut $0{,}1 \times 0{,}7 = 0{,}07$. La probabilité cherchée vaut $\dfrac{0{,}07}{0{,}142} \approx 0{,}49$.
4. La neige annule $70\,\%$ des matchs, contre $2\,\%$ pour le soleil : elle explique près d'une annulation sur deux, alors qu'elle n'arrive qu'une fois sur dix.

Corrigé 5 · Retrouver une branche manquante

Revenir à l'énoncé

1. $P(A \cap B) = 0{,}4 \times 0{,}3 = 0{,}12$.
2. $P(B) = P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap B)$. Donc $0{,}42 = 0{,}12 + 0{,}6\,x$, où $x = P_{\overline{A}}(B)$. Ainsi $x = 0{,}5$.
3. $P_A(B) = 0{,}3$ et $P(B) = 0{,}42$: ces nombres diffèrent, donc A et B ne sont pas indépendants.
4. Il faudrait $P(B) = P_A(B) = 0{,}3$. Alors $0{,}12 + 0{,}6\,x = 0{,}3$, donc $x = 0{,}3$: B serait aussi probable que A soit réalisé ou non.

Corrigé 6 · Le portique antivol

Revenir à l'énoncé

1. $10\,000 \times 0{,}01 = 100$ clients. Le portique sonne pour 98 d'entre eux.
2. Il reste $9\,900$ clients, et le portique sonne pour $9\,900 \times 0{,}03 = 297$ d'entre eux.
3. $P(S) = \dfrac{98 + 297}{10\,000} = 0{,}0395$, soit environ $0{,}04$. $P_S(V) = \dfrac{98}{395} \approx 0{,}25$.
4. Non : seule une alarme sur quatre environ concerne un article non payé, alors que $P_V(S) = 0{,}98$. Comme ces clients sont rares, les fausses alarmes sont bien plus nombreuses.

Corrigé 7 · Un dé et trois événements

Revenir à l'énoncé

1. $P(A) = \dfrac{1}{2}$, $P(B) = \dfrac{2}{3}$ et $A \cap B$ contient 2 et 4, donc $P(A \cap B) = \dfrac{1}{3} = P(A) \times P(B)$.
2. $P(A \cap C) = \dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3}$, car $A \cap C$ contient 4 et 6, alors que $P(A) \times P(C) = \dfrac{1}{4}$. Ils ne sont pas indépendants.
3. Non : ils peuvent se réaliser ensemble, par exemple avec le résultat 2.
4. S'ils sont incompatibles, $P(E \cap F) = 0$. Or $P(E) \times P(F)$ est strictement positif, donc ces deux nombres diffèrent.

Corrigé 8 · Deux capteurs indépendants

Revenir à l'énoncé

1. $P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B})$, donc $P(A \cap \overline{B}) = P(A) - P(A) \times P(B) = P(A) \times (1 - P(B)) = P(A) \times P(\overline{B})$.
2. Par indépendance : $0{,}9 \times 0{,}95 = 0{,}855$.
3. D'après la question 1 : $0{,}9 \times 0{,}05 = 0{,}045$.
4. Il est plus simple de calculer la probabilité qu'aucun ne fonctionne. Les contraires sont indépendants, en appliquant deux fois la question 1 : $0{,}1 \times 0{,}05 = 0{,}005$. La réponse est $1 - 0{,}005 = 0{,}995$.

Corrigé 9 · Avec ou sans remise

Revenir à l'énoncé

1. La boule est remise : la composition de l'urne ne change pas. L'arbre a deux niveaux, avec $0{,}6$ vers rouge et $0{,}4$ vers bleu à chaque tirage. La probabilité vaut $0{,}6^2 + 0{,}4^2 = 0{,}36 + 0{,}16 = 0{,}52$.
2. $\dfrac{3}{5} \times \dfrac{2}{4} + \dfrac{2}{5} \times \dfrac{1}{4} = 0{,}3 + 0{,}1 = 0{,}4$.
3. $P(R_2) = \dfrac{3}{5} \times \dfrac{2}{4} + \dfrac{2}{5} \times \dfrac{3}{4} = 0{,}3 + 0{,}3 = 0{,}6$.
4. $P_{R_1}(R_2) = \dfrac{2}{4} = 0{,}5$ et $P(R_2) = 0{,}6$: ces nombres diffèrent, donc ils ne sont pas indépendants.

Corrigé 10 · Une série de tirs au but

Revenir à l'énoncé

1. Un seul chemin : $0{,}7^3 = 0{,}343$.
2. Trois chemins contiennent deux réussites, et chacun a pour probabilité $0{,}7^2 \times 0{,}3 = 0{,}147$. Le total vaut $0{,}441$.
3. Le contraire est « trois échecs », de probabilité $0{,}3^3 = 0{,}027$. La réponse est $1 - 0{,}027 = 0{,}973$.
4. L'échec peut être au premier, deuxième, troisième ou quatrième tir : 4 chemins, chacun de probabilité $0{,}7^3 \times 0{,}3 = 0{,}1029$. Le total vaut $0{,}4116$.

Corrigé 11 · Un seuil à atteindre

Revenir à l'énoncé

1. Par indépendance, sur l'unique chemin sans gain, la probabilité vaut $0{,}6^n$.
2. $1 - 0{,}6^n$ vaut $0{,}4$; $0{,}64$; $0{,}784$; $0{,}8704$ pour $n = 1$; 2 ; 3 ; 4.
3. Il en faut 4 : le seuil n'est pas atteint avec 3 parties, et il l'est avec 4.
4. Les événements « gagner à la partie k » ne sont pas incompatibles : on ne peut pas additionner leurs probabilités. La bonne valeur est $0{,}8704$.

Corrigé 12 · Monte-Carlo sous une parabole

Revenir à l'énoncé

1. Les points du carré situés sous la parabole ou sur elle, car la condition est $y \leqslant x^2$.
2. Les points sont répartis uniformément dans un carré d'aire 1. Pour n grand, la proportion de points comptés approche donc la part d'aire sous la parabole, c'est-à-dire l'aire cherchée.
3. On conjecture que l'aire vaut $\dfrac{1}{3}$.
4. La condition devient $x^2 + y^2 \leqslant 1$: les points comptés sont dans un quart de disque, d'aire $\dfrac{\pi}{4}$. Donc $s \div n$ approche $\dfrac{\pi}{4}$, et la fonction doit renvoyer $4 \times s \div n$.

Pour continuer : les exercices corrigés en ligne de Première, puis la série sur les arbres et les tests.