FICHE D'EXERCICES CORRIGÉS

Identités remarquables

2de · Exercices corrigés

Une identité est utile quand elle simplifie une décision ou vérifie un résultat. Le cours de calcul littéral rappelle les trois formes à connaître ; ici, chaque exercice demande de choisir et de justifier.

Reconnaître, calculer, contrôler

Exercice 1 | Deux égalités trop rapides

Corrigé p. 3 →

Un élève écrit $(a+b)^2 = a^2 + b^2$ puis $(a-b)^2 = a^2 - b^2$.

1. Vérifier chacune de ces affirmations avec $a = 5$ et $b = 2$.
2. Développer les deux carrés correctement pour des réels a et b.
3. Identifier le terme oublié dans la première égalité et expliquer pourquoi le second membre de la deuxième peut même être négatif.

Exercice 2 | Trois calculs sans calculatrice

Corrigé p. 3 →

Donner des résultats exacts en faisant apparaître l'identité choisie.

1. Calculer 51^2 à partir de 50^2.
2. Calculer 97^2 à partir de 100^2.
3. Calculer 104×96 sans multiplier chiffre par chiffre.
4. Expliquer pourquoi les trois stratégies ne font pas apparaître le même signe devant le terme intermédiaire.

Exercice 3 | Un produit de facteurs conjugués

Corrigé p. 3 →

On considère $P(x) = (3x-2)(3x+2)$.

1. Donner sa forme développée et réduire.
2. Calculer $P\left(\frac{1}{3}\right)$ avec la forme la plus rapide et contrôler avec l'autre.
3. Pour quelles valeurs de x le produit $P(x)$ est-il nul ?

Exercice 4 | Le coefficient manquant

Corrigé p. 4 →

Compléter chaque écriture, puis contrôler par développement.

1. $(x+\square)^2 = x^2 + 12x + 36$.
2. $(\square x - 3)^2 = 4x^2 - 12x + 9$.
3. $9x^2 - 16 = (3x - \square)(3x + \square)$.

Transformer sans changer la valeur

Exercice 5 | Le signe devant la parenthèse

Corrigé p. 4 →

Soit $H(x) = 3(x-2)^2 - (x+1)(x-1)$.

1. Développer séparément le carré et le produit conjugué.
2. Réduire $H(x)$; montrer où agit le signe moins.
3. Vérifier la forme réduite pour $x = 1$ par substitution directe.

Exercice 6 | Deux écritures, une seule expression

Corrigé p. 4 →

On donne $A(x) = (x+2)^2 - 4x$ et $B(x) = x^2 + 4$.

1. Comparer $A(-2)$ et $B(-2)$, puis $A(3)$ et $B(3)$.
2. Prouver que $A(x) = B(x)$ pour tout réel x.
3. Pourquoi les deux vérifications numériques ne suffisent-elles pas, à elles seules, pour établir cette égalité générale ?

Exercice 7 | Un carré presque parfait

Corrigé p. 4 →

Considérer $Q(x) = x^2 + 10x + 21$.

1. Expliquer pourquoi $Q(x)$ n'est pas le développement de $(x+5)^2$.
2. Écrire $Q(x)$ comme une différence de deux carrés, puis factoriser.
3. En déduire toutes les solutions de $Q(x) = 0$ sans formule générale.

Exercice 8 | Un carré caché dans un produit

Corrigé p. 4 →

Pour un entier naturel n, on pose $T = n(n+2) + 1$.

1. Montrer que T est toujours un carré parfait.
2. Calculer $19 \times 21 + 1$ sans effectuer le produit.
3. Si $T = 625$, retrouver n et vérifier la valeur trouvée.

Raisonner avec une identité

Exercice 9 | Une expression toujours au-dessus de sept

Corrigé p. 4 →

On pose $R(x) = (x-4)^2 + 7$ pour tout réel x.

1. Développer et réduire $R(x)$.
2. Justifier, sans tracer de courbe, que $R(x) \geq 7$.
3. Pour quelle valeur de x cette borne est-elle atteinte ?

Exercice 10 | Une fausse égalité parfois vraie

Corrigé p. 4 →

Un élève pense que $(x-3)^2 = x^2 - 9$ pour tout réel x.

1. Réfuter l'affirmation par une valeur de x.
2. Développer le membre de gauche et corriger l'identité.
3. Déterminer la valeur de x pour laquelle l'égalité erronée est pourtant vraie. Pourquoi cet exemple isolé ne la démontre-t-il pas ?

Exercice 11 | Une différence toujours multiple de quatre

Corrigé p. 4 →

Pour un entier naturel n, comparer les carrés de n et de $n+2$.

1. Calculer $(n+2)^2 - n^2$ en factorisant une différence de carrés.
2. En déduire que cette différence est un multiple de 4.
3. Est-elle toujours un multiple de 8 ? Justifier.

Exercice 12 | Une aire sous contrainte

Corrigé p. 4 →

Un rectangle a pour côtés $20+t$ et $20-t$ centimètres, avec $0 \leq t < 20$. Son périmètre reste égal à 80 centimètres.

1. Exprimer son aire $S(t)$ sans laisser de produit.
2. Comparer $S(4)$ à l'aire obtenue pour $t = 0$.
3. Justifier que l'aire ne peut dépasser $400\,\text{cm}^2$ et préciser quand cette aire est atteinte.
4. Peut-on obtenir exactement $375\,\text{cm}^2$? Déterminer t.

Corrigés détaillés

Corrigé 1 · Deux égalités trop rapides

Revenir à l'énoncé

1. Pour $a=5$, $b=2$, $(a+b)^2 = 49$ alors que $a^2+b^2 = 29$. De même, $(a-b)^2 = 9$ alors que $a^2-b^2 = 21$: les deux égalités sont fausses.
2. $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ et $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.
3. Le terme $2ab$ manque dans le premier calcul. Dans le second, $a^2 - b^2$ peut être négatif si $|b| > |a|$, alors qu'un carré est toujours positif ou nul.

Corrigé 2 · Trois calculs sans calculatrice

Revenir à l'énoncé

1. $51^2 = (50+1)^2 = 2\,500 + 100 + 1 = 2\,601$.
2. $97^2 = (100-3)^2 = 10\,000 - 600 + 9 = 9\,409$.
3. $104 \times 96 = (100+4)(100-4) = 10\,000 - 16 = 9\,984$.
4. Un carré de somme donne $+2ab$, un carré de différence donne $-2ab$; dans le produit de conjugués, les deux termes mixtes s'annulent, il ne reste que $a^2 - b^2$.

Corrigé 3 · Un produit de facteurs conjugués

Revenir à l'énoncé

1. En posant $a = 3x$ et $b = 2$, $P(x) = (a-b)(a+b) = a^2 - b^2 = 9x^2 - 4$.
2. Avec $x = \frac{1}{3}$, les facteurs valent -1 et 3, donc $P\left(\frac{1}{3}\right) = -3$. La forme développée donne $9 \times \frac{1}{9} - 4 = -3$.
3. Un produit est nul si l'un de ses facteurs est nul : $3x - 2 = 0$ ou $3x + 2 = 0$. Ainsi $x = \frac{2}{3}$ ou $x = -\frac{2}{3}$.

Corrigé 4 · Le coefficient manquant

Revenir à l'énoncé

1. $(x+6)^2 = x^2 + 12x + 36$; le blanc vaut 6.
2. $(2x-3)^2 = 4x^2 - 12x + 9$; le blanc vaut 2. Le choix -2 donnerait un terme central positif.
3. $9x^2 - 16 = (3x)^2 - 4^2 = (3x-4)(3x+4)$; les deux blancs valent 4.

Corrigé 5 · Le signe devant la parenthèse

Revenir à l'énoncé

1. $(x-2)^2 = x^2 - 4x + 4$ et $(x+1)(x-1) = x^2 - 1$.
2. $H(x) = 3(x^2 - 4x + 4) - (x^2 - 1) = 3x^2 - 12x + 12 - x^2 + 1 = 2x^2 - 12x + 13$. Le signe moins change aussi le signe de la constante -1.
3. $H(1) = 3(1-2)^2 - (1+1)(1-1) = 3$. La forme réduite fournit $2 - 12 + 13 = 3$.

Corrigé 6 · Deux écritures, une seule expression

Revenir à l'énoncé

1. $A(-2) = (-2+2)^2 - 4(-2) = 8$ et $B(-2) = 4 + 4 = 8$. De même, $A(3) = 25 - 12 = 13$ et $B(3) = 9 + 4 = 13$.
2. Pour tout x, $(x+2)^2 - 4x = x^2 + 4x + 4 - 4x = x^2 + 4 = B(x)$.
3. Deux valeurs vérifiées n'excluent pas que deux expressions diffèrent ailleurs. Le développement prouve l'égalité pour tout réel.

Corrigé 7 · Un carré presque parfait

Revenir à l'énoncé

1. $(x+5)^2 = x^2 + 10x + 25$, dont la constante dépasse celle de Q de 4.
2. La différence de deux carrés donne $Q(x) = (x+5)^2 - 2^2 = [(x+5) - 2][(x+5) + 2] = (x+3)(x+7)$.
3. $Q(x) = 0$ équivaut à $x + 3 = 0$ ou $x + 7 = 0$, d'où $x = -3$ ou $x = -7$.

Corrigé 8 · Un carré caché dans un produit

Revenir à l'énoncé

1. $n(n+2) + 1 = n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$.
2. $19 \times 21 + 1 = (19+1)^2 = 400$.
3. Si $(n+1)^2 = 625 = 25^2$, et n est naturel, alors $n + 1 = 25$, donc $n = 24$. Vérification : $24 \times 26 + 1 = 625$.

Corrigé 9 · Une expression toujours au-dessus de sept

Revenir à l'énoncé

1. $R(x) = x^2 - 8x + 16 + 7 = x^2 - 8x + 23$.
2. Pour tout réel x, $(x-4)^2 \geq 0$, donc $R(x) = (x-4)^2 + 7 \geq 7$.
3. Le carré est nul seulement pour $x = 4$; alors $R(4) = 7$.

Corrigé 10 · Une fausse égalité parfois vraie

Revenir à l'énoncé

1. Pour $x = 0$, $(0-3)^2 = 9$ tandis que $0^2 - 9 = -9$.
2. L'identité correcte est $(x-3)^2 = x^2 - 6x + 9$.
3. L'égalité erronée impose $x^2 - 6x + 9 = x^2 - 9$, soit $-6x = -18$, donc $x = 3$. À cette valeur, les deux membres valent 0. Une égalité vraie pour un seul réel n'est pas une identité vraie pour tous.

Corrigé 11 · Une différence toujours multiple de quatre

Revenir à l'énoncé

1. $(n+2)^2 - n^2 = [(n+2) - n][(n+2) + n] = 2(2n+2) = 4(n+1)$.
2. Comme $n + 1$ est entier, la différence est bien un multiple de 4.
3. Non : pour $n = 0$, la différence vaut 4, qui n'est pas un multiple de 8.

Corrigé 12 · Une aire sous contrainte

Revenir à l'énoncé

1. $S(t) = (20+t)(20-t) = 20^2 - t^2 = 400 - t^2$ en cm^2.
2. $S(4) = 400 - 16 = 384$ cm^2, contre $S(0) = 400$ cm^2 : il manque 16 cm^2.
3. Puisque $t^2 \geq 0$, $S(t) \leq 400$. L'égalité est atteinte uniquement pour $t = 0$, lorsque le rectangle est un carré.
4. $S(t) = 375$ donne $t^2 = 25$. La contrainte $t \geq 0$ retient seulement $t = 5$, qui vérifie bien $0 \leq t < 20$.

Pour revoir une transformation, consulter le cours de calcul littéral de Seconde. Les exercices corrigés du même chapitre sur PediaMath offrent d'autres questions que cette fiche.