FICHE D'EXERCICES CORRIGÉS

Ensembles de nombres

2de · Nombres réels et intervalles

Le cours sur les nombres réels et les intervalles pose les définitions. Cette fiche demande de les utiliser : classer, prouver, écrire des intervalles et encadrer un réel.

Classer un nombre et le justifier

Exercice 1 — Cocher les bons ensembles

Corrigé p. 4 →

Avant de classer un nombre, il faut souvent le simplifier.

	$a=-\frac{18}{6}$	$b=\sqrt{0{,}09}$	$c=\frac{7}{8}$	$d=\frac{5}{12}$	$e=\frac{\sqrt{50}}{\sqrt{2}}$	$f=2\pi$	$g=1+\sqrt{2}$
$\mathbb{N}$	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
$\mathbb{Z}$	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
$\mathbb{D}$	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
$\mathbb{Q}$	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
$\mathbb{R}$	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

1. Simplifier chaque nombre ou donner son écriture décimale, lorsque c'est possible.
2. Cocher tous les ensembles auxquels il appartient.
3. Pourquoi une croix pour $\mathbb{Z}$ entraîne-t-elle des croix pour $\mathbb{D}$, $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$?

Exercice 2 — Écrire sur une puissance de dix

Corrigé p. 4 →

Un nombre décimal s'écrit $\frac{a}{10^n}$ avec a entier relatif et n entier naturel.

1. Écrire sous cette forme : $-2{,}4$; $1{,}05$; $\frac{3}{8}$; $\frac{7}{40}$.
2. Simplifier $\frac{21}{28}$, puis montrer que ce nombre est décimal.
3. Un élève affirme que $\frac{21}{28}$ n'est pas décimal, car le facteur 7 apparaît au dénominateur. Corriger son raisonnement.

Exercice 3 — Prouver qu'un tiers n'est pas décimal

Corrigé p. 4 →

On raisonne par l'absurde : on suppose que $\frac{1}{3}=\frac{a}{10^n}$, avec a entier relatif et n entier naturel.

1. Montrer que $3a=10^n$.
2. Quelle est la somme des chiffres de 10^n ? En déduire que 10^n n'est pas un multiple de 3.
3. Conclure.
4. Adapter la preuve pour montrer que $\frac{2}{3}$ n'est pas décimal.

Exercice 4 — Prouver que $\sqrt{2}$ n'est pas rationnel

Corrigé p. 4 →

On admet que tout rationnel s'écrit sous forme de fraction irréductible.

1. Soit n un entier impair, $n = 2k+1$ avec k entier. Développer n^2 et montrer que n^2 est impair. En déduire que si n^2 est pair, alors n est pair.
2. On suppose que $\sqrt{2} = \dfrac{p}{q}$, fraction irréductible avec p et q entiers naturels non nuls. Montrer que $p^2 = 2q^2$, puis que p est pair.
3. On écrit $p = 2r$ avec r entier naturel. Montrer que $q^2 = 2r^2$, puis conclure.
4. En déduire que $3 + \sqrt{2}$ est irrationnel.

Indice. À la question 4, isoler $\sqrt{2}$ dans l'égalité supposée.

Exercice 5 — Vrai ou faux, avec justification

Corrigé p. 4 →

Dire si chaque affirmation est vraie ou fausse. Justifier par une preuve courte ou par un contre-exemple.

1. La somme de deux nombres décimaux est un nombre décimal.
2. L'inverse d'un nombre décimal non nul est un nombre décimal.
3. Le produit de deux irrationnels est irrationnel.
4. La somme d'un rationnel et d'un irrationnel est irrationnelle.

Exercice 6 — Retrouver la fraction d'une écriture périodique

Corrigé p. 5 →

Approfondissement. Une écriture décimale dont un bloc de chiffres se répète sans fin cache une fraction.

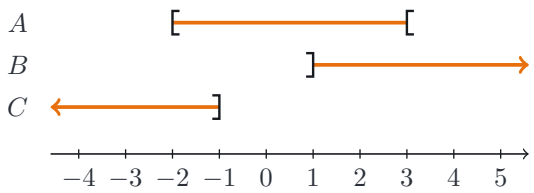
1. On pose $x = 0{,}272727\ldots$ Calculer $100x - x$, puis écrire x sous forme de fraction irréductible.
2. On pose $y = 1{,}2333\ldots$ Calculer $100y - 10y$, puis écrire y sous forme de fraction irréductible.
3. On pose $z = 0{,}999\ldots$ Calculer $10z - z$. Que peut-on conclure ?

Passer aux intervalles

Exercice 7 — Lire trois ensembles sur une droite

Corrigé p. 5 →

Le schéma représente trois ensembles de réels A, B et C. Les crochets indiquent si l'extrémité est incluse.



1. Écrire A, B et C sous forme d'intervalles.
2. Traduire chacun par une inégalité.
3. Les nombres -1, 1 et 3 appartiennent-ils à A ? à B ? à C ?
4. Déterminer $A \cap B$, $A \cap C$, $B \cap C$ et $A \cup C$.

Exercice 8 — « Et », « ou » et complémentaire

Corrigé p. 5 →

Le mot « et » conduit à une intersection, le mot « ou » à une réunion.

1. Déterminer l'ensemble des réels x tels que $x + 1 < 4$ et $2x \geqslant -6$.
2. Écrire l'ensemble des réels x tels que $x < -2$ ou $x \geqslant 5$. Expliquer pourquoi ce n'est pas un intervalle.
3. Déterminer le complémentaire dans $\mathbb{R}$ de l'ensemble de la question 2.
4. Déterminer le complémentaire dans $\mathbb{R}$ de $[-1\,;\,3[$.

Exercice 9 — Une mesure arrondie

Corrigé p. 5 →

Les dimensions d'un terrain rectangulaire sont arrondies au décimètre : on lit $L = 24{,}6$ m et $\ell = 13{,}2$ m.

1. Justifier que $L \in [24{,}55\,;\,24{,}65[$, puis donner l'intervalle de ℓ.
2. Encadrer le périmètre P du terrain.
3. Encadrer son aire S, puis calculer l'amplitude de cet encadrement.
4. Peut-on donner l'arrondi de l'aire au mètre carré ? Justifier.

Encadrer un réel

Exercice 10 — Balayage pour approcher $\sqrt{7}$

Corrigé p. 5 →

Le programme Python ci-dessous avance par pas de $0{,}01$ à partir de 2.

```
x = 2
while (x + 0.01)**2 < 7:
    x = x + 0.01
print(x)
```

1. Calculer $2{,}64^2$ et $2{,}65^2$. En déduire un encadrement de $\sqrt{7}$ d'amplitude $0{,}01$.
2. Quelle valeur le programme affiche-t-il, aux erreurs d'arrondi près ?
3. Quelle modification du programme donne un encadrement d'amplitude $0{,}001$? Écrire cet encadrement.
4. Pourquoi l'égalité $\sqrt{7} = 2{,}65$ est-elle fausse ?

Exercice 11 — Toujours un nombre entre deux

Corrigé p. 5 →

On considère $a = \dfrac{3}{7}$ et $b = \dfrac{4}{9}$.

1. Comparer a et b sans calculatrice.
2. Calculer $m = \dfrac{a+b}{2}$ et justifier que m est strictement entre a et b.
3. Donner un nombre décimal strictement compris entre a et b.
4. Expliquer pourquoi il existe toujours un rationnel strictement compris entre deux rationnels distincts.

Corrigés détaillés

Corrigé 1 · Cocher les bons ensembles

Revenir à l'énoncé

1. $a = -3$, $b = 0{,}3$, $c = 0{,}875$ et $e = \sqrt{\dfrac{50}{2}} = \sqrt{25} = 5$, avec les règles sur les racines carrées. Les nombres d, f et g ne se simplifient pas.
2. a : $\mathbb{Z}$, $\mathbb{D}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$. Puis b et c : $\mathbb{D}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$. Pour d : $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$; si $d = \dfrac{a}{10^n}$, alors $5 \times 10^n = 12a$ serait multiple de 3, or la somme de ses chiffres vaut 5. Pour e : les cinq ensembles. Pour f et g : $\mathbb{R}$ seulement. On admet que π est irrationnel, donc 2π aussi, et l'exercice 5, question 4, règle le cas de g.
3. Les ensembles sont emboîtés : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$. Un nombre d'un ensemble appartient donc à tous les suivants.

Corrigé 2 · Écrire sur une puissance de dix

Revenir à l'énoncé

1. $-2{,}4 = \dfrac{-24}{10}$; $1{,}05 = \dfrac{105}{100}$; $\dfrac{3}{8} = \dfrac{375}{1000}$; $\dfrac{7}{40} = \dfrac{175}{1000}$.
2. $\dfrac{21}{28} = \dfrac{3}{4} = \dfrac{75}{100}$: ce nombre est décimal.
3. Il faut d'abord rendre la fraction irréductible. Le facteur 7 est aussi au numérateur et disparaît : seul le dénominateur de la forme irréductible permet de conclure.

Corrigé 3 · Prouver qu'un tiers n'est pas décimal

Revenir à l'énoncé

1. En multipliant par 3×10^n les deux membres de l'égalité, on obtient $10^n = 3a$.
2. 10^n s'écrit avec un 1 suivi de n zéros : la somme de ses chiffres vaut 1. Elle n'est pas multiple de 3, donc 10^n non plus.
3. $3a$ est un multiple de 3, or il est égal à 10^n qui n'en est pas un. C'est une contradiction : $\dfrac{1}{3}$ n'est pas décimal.
4. Si $\dfrac{2}{3} = \dfrac{a}{10^n}$, alors $3a = 2 \times 10^n$. Ce nombre s'écrit 2 suivi de zéros : la somme de ses chiffres vaut 2, il n'est pas multiple de 3. Même contradiction.

Corrigé 4 · Prouver que $\sqrt{2}$ n'est pas rationnel

Revenir à l'énoncé

1. $n^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$ est impair. Par contraposée, si n^2 est pair, n n'est pas impair : il est pair.
2. En élevant au carré, $2 = \dfrac{p^2}{q^2}$, donc $p^2 = 2q^2$. Ainsi p^2 est pair, donc p aussi d'après la question 1.
3. $4r^2 = 2q^2$ donne $q^2 = 2r^2$: q^2 est pair, donc q aussi. Alors p et q sont tous deux divisibles par 2, ce qui contredit l'irréductibilité. Donc $\sqrt{2}$ n'est pas rationnel.
4. Si $3 + \sqrt{2} = s$ était rationnel, alors $\sqrt{2} = s - 3$ serait une différence de rationnels, donc rationnel. C'est faux : $3 + \sqrt{2}$ est irrationnel.

Corrigé 5 · Vrai ou faux, avec justification

Revenir à l'énoncé

1. Vrai. Avec $n \leqslant m$, $\dfrac{a}{10^n} + \dfrac{b}{10^m} = \dfrac{a \times 10^{m-n} + b}{10^m}$ est de la forme attendue.
2. Faux. 3 est décimal, mais son inverse $\dfrac{1}{3}$ ne l'est pas (exercice 3).
3. Faux. $\sqrt{2}$ est irrationnel, mais $\sqrt{2} \times \sqrt{2} = 2$ est entier.
4. Vrai. Soit r rationnel et x irrationnel. Si $r + x = s$ était rationnel, $x = s - r$ le serait aussi : contradiction.

Corrigé 6 · Retrouver la fraction d'une écriture périodique

Revenir à l'énoncé

1. $100x - x = 27{,}2727\ldots - 0{,}2727\ldots = 27$, donc $99x = 27$ et $x = \dfrac{27}{99} = \dfrac{3}{11}$.
2. $100y = 123{,}33\ldots$ et $10y = 12{,}33\ldots$ ont la même partie décimale. Donc $90y = 111$ et $y = \dfrac{111}{90} = \dfrac{37}{30}$.
3. $10z - z = 9{,}99\ldots - 0{,}99\ldots = 9$, donc $9z = 9$ et $z = 1$. Les écritures $0{,}999\ldots$ et 1 désignent le même réel.

Corrigé 7 · Lire trois ensembles sur une droite

Revenir à l'énoncé

1. $A = [-2\,;\,3[$, $B =]1\,;\,+\infty[$ et $C =]-\infty\,;\,-1]$.
2. Pour A : $-2 \leqslant x < 3$. Pour B : $x > 1$. Pour C : $x \leqslant -1$.
3. -1 appartient à A et C, pas à B. Le nombre 1 appartient à A seulement, car le crochet de B l'exclut. Le nombre 3 appartient à B seulement.
4. $A \cap B =]1\,;\,3[$; $A \cap C = [-2\,;\,-1]$; $B \cap C = \emptyset$; $A \cup C =]-\infty\,;\,3[$.

Corrigé 8 · « Et », « ou » et complémentaire

Revenir à l'énoncé

1. Les conditions donnent $x < 3$ et $x \geqslant -3$, soit $x \in [-3\,;\,3[$.
2. C'est $]-\infty\,;\,-2[\cup [5\,;\,+\infty[$. Il contient -3 et 6, mais pas 0 qui est entre les deux : ce n'est pas un intervalle.
3. $[-2\,;\,5[$: ce sont les réels qui ne vérifient ni $x < -2$ ni $x \geqslant 5$.
4. $]-\infty\,;\,-1[\cup [3\,;\,+\infty[$. Le crochet change de sens : -1 et 3 changent de côté.

Corrigé 9 · Une mesure arrondie

Revenir à l'énoncé

1. Les nombres qui s'arrondissent à $24{,}6$ au dixième sont ceux de $[24{,}55\,;\,24{,}65[$. De même $\ell \in [13{,}15\,;\,13{,}25[$.
2. $75{,}4 \leqslant P < 75{,}8$, car $2 \times (24{,}55 + 13{,}15) = 75{,}4$ et $2 \times (24{,}65 + 13{,}25) = 75{,}8$, en mètres.
3. $322{,}8325 \leqslant S < 326{,}6125$ en m², car les longueurs sont positives. L'amplitude vaut $3{,}78$ m².
4. Non. L'aire peut s'arrondir à 323 m² comme à 327 m² : les mesures ne permettent pas de choisir. On peut dire que l'aire vaut 325 m² à $2{,}2$ m² près.

Corrigé 10 · Balayage pour approcher $\sqrt{7}$

Revenir à l'énoncé

1. $2{,}64^2 = 6{,}9696$ et $2{,}65^2 = 7{,}0225$, donc $2{,}64 < \sqrt{7} < 2{,}65$.
2. Environ $2{,}64$: c'est le plus grand nombre du balayage dont le carré reste sous 7. Python peut afficher quelques décimales parasites.
3. Remplacer les deux 0.01 par 0.001. On obtient $2{,}645 < \sqrt{7} < 2{,}646$, car $2{,}645^2 = 6{,}996025$ et $2{,}646^2 = 7{,}001316$.
4. $2{,}65^2 = 7{,}0225$ n'est pas égal à 7 : $2{,}65$ n'est qu'une valeur approchée.

Corrigé 11 · Toujours un nombre entre deux

Revenir à l'énoncé

1. Au même dénominateur, $a = \dfrac{27}{63}$ et $b = \dfrac{28}{63}$, donc $a < b$.
2. $m = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{27}{63} + \dfrac{28}{63}\right) = \dfrac{55}{126}$. Comme $a = \dfrac{54}{126}$ et $b = \dfrac{56}{126}$, on a $a < m < b$.
3. $0{,}43$ convient, car $43 \times 7 = 301 > 300$ et $43 \times 9 = 387 < 400$, soit $\dfrac{3}{7} < \dfrac{43}{100} < \dfrac{4}{9}$.
4. Si $a < b$ sont rationnels, leur moyenne $\dfrac{a+b}{2}$ est rationnelle et se trouve strictement entre eux, car elle est à égale distance des deux.

Le cours sur les nombres réels et les intervalles et la synthèse sur les ensembles de nombres rappellent les notations. Les exercices corrigés en ligne proposent d'autres situations.