FICHE D'EXERCICES CORRIGÉS

Dérivation

1re · Nombre dérivé, tangente, variations, optimisation

Le cours de Première sur le nombre dérivé et la tangente donne les définitions et les formules utilisées ici. La fiche part du taux de variation, passe au calcul des dérivées, relie le signe de la dérivée aux variations, puis résout des problèmes d'optimisation.

Du taux de variation au nombre dérivé

Exercice 1 — Des sécantes à la tangente

Corrigé p. 4 →

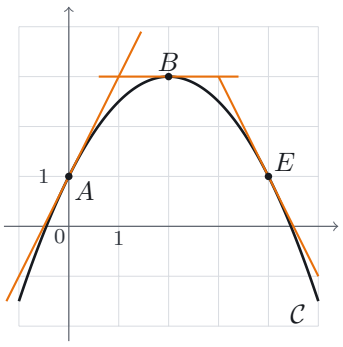
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 3x$, et h un réel non nul.

1. Calculer $f(2)$, puis développer $f(2+h)$.
2. Montrer que le taux de variation de f entre 2 et $2+h$ vaut $h+1$.
3. Donner la pente de la sécante pour $h = 1$, $h = 0{,}1$, $h = 0{,}01$ et $h = -0{,}01$.
4. En déduire $f'(2)$, puis une équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 2.

Exercice 2 — Lire des nombres dérivés sur un graphique

Corrigé p. 5 →

La courbe $\mathcal{C}$ représente une fonction f dérivable sur $[-1\,;5]$. Les droites tracées sont tangentes à $\mathcal{C}$ en A, B et E, d'abscisses 0, 2 et 4.



1. Lire $f'(0)$, $f'(2)$ et $f'(4)$.
2. Donner une équation de chacune des tangentes en A et en E.
3. On admet que $f(x) = -0{,}5x^2 + 2x + 1$. Calculer $f'(x)$ et vérifier les lectures de la question 1.
4. En quel point de $\mathcal{C}$ la tangente est-elle parallèle à la droite d'équation $y = -x$?

Exercice 3 — La tangente pour calculer de tête

Corrigé p. 5 →

Près du point de contact, une courbe et sa tangente sont très proches : $f(a+h) \approx f(a) + h\,f'(a)$ pour h petit.

1. Déterminer une équation de la tangente à la courbe de la fonction racine carrée au point d'abscisse 4.
2. En déduire, sans calculatrice, des valeurs approchées de $\sqrt{4{,}1}$ et de $\sqrt{3{,}9}$.
3. Comparer avec les valeurs données par la calculatrice.
4. Avec la tangente en 1 à la courbe de la fonction inverse, donner une valeur approchée de $\dfrac{1}{1{,}02}$.

Exercice 4 — La racine carrée n'est pas dérivable en 0

Corrigé p. 5 →

On étudie le taux de variation de la fonction racine carrée entre 0 et h, pour $h > 0$.

1. Montrer que ce taux de variation vaut $\dfrac{1}{\sqrt{h}}$.
2. Calculer ce taux pour $h = 0{,}01$, $h = 0{,}0001$ et $h = 0{,}000001$.
3. Ce taux a-t-il une limite finie quand h tend vers 0 ? Conclure.
4. Que peut-on dire de la tangente à la courbe à l'origine du repère ?

Calculer des fonctions dérivées

Exercice 5 — Six dérivées, six règles

Corrigé p. 5 →

Calculer la fonction dérivée de chaque fonction sur l'intervalle indiqué.

1. $f(x) = x^3 - 6x^2 + 5$ sur $\mathbb{R}$
2. $g(x) = \dfrac{4}{x}$ sur $]0\,;+\infty[$
3. $h(x) = (2x+1)\sqrt{x}$ sur $]0\,;+\infty[$
4. $k(x) = \dfrac{3x-1}{x+2}$ sur $]-2\,;+\infty[$
5. $m(x) = (2x-5)^3$ sur $\mathbb{R}$
6. $n(x) = \dfrac{5}{2x+3}$ sur $\left]-\dfrac{3}{2}\,;+\infty\right[$

Exercice 6 — Corriger une copie

Corrigé p. 6 →

Lina a dérivé quatre fonctions. Pour chaque calcul, dire s'il est juste ; sinon, nommer la règle mal appliquée et corriger.

1. $f(x) = x^2(x+1)$; Lina écrit $f'(x) = 2x \times 1 = 2x$.
2. $g(x) = \dfrac{x-1}{x}$ sur $]0\,;+\infty[$; Lina écrit $g'(x) = \dfrac{1}{x^2}$.
3. $h(x) = \sqrt{4x+1}$ sur $\left]-\dfrac{1}{4}\,;+\infty\right[$; Lina écrit $h'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{4x+1}}$.
4. $k(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$ sur $\mathbb{R}$; Lina écrit $k'(x) = \dfrac{1}{2x}$.

Exercice 7 — Démontrer la dérivée d'un produit

Corrigé p. 6 →

Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I, a un réel de I et h un réel non nul tel que $a+h$ appartienne à I. On admet que $v(a+h)$ tend vers $v(a)$ quand h tend vers 0.

1. Vérifier que $u(a+h)v(a+h) - u(a)v(a)$ est égal à $\big[u(a+h)-u(a)\big]v(a+h) + u(a)\big[v(a+h)-v(a)\big]$.
2. En déduire le taux de variation de uv entre a et $a+h$, puis sa limite quand h tend vers 0.
3. Conclure, puis calculer la dérivée de $f(x) = x\sqrt{x}$ sur $]0\,;+\infty[$.

Dérivée et variations

Exercice 8 — Un tableau de variation pas à pas

Corrigé p. 6 →

Soit f la fonction définie sur $[-3\,;5]$ par $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 4$.

1. Calculer $f'(x)$ et vérifier que $f'(x) = 3(x+1)(x-3)$.
2. Étudier le signe de $f'(x)$ sur $[-3\,;5]$.
3. Dresser le tableau de variation de f.
4. Donner le maximum et le minimum de f sur $[-3\,;5]$, et les valeurs de x où ils sont atteints.
5. En déduire que, pour tout x de $[-3\,;5]$, $-23 \leqslant f(x) \leqslant 9$.

Indice. Le signe d'un trinôme se lit sur sa forme factorisée.

Exercice 9 — Lire un tableau de variation

Corrigé p. 6 →

Une fonction g, dérivable sur $[-4\,;4]$, a le tableau de variation suivant.

x	-4		-1		2		4
g	3	↘	-2	↗	5	↘	1

1. Donner le signe de $g'(x)$ sur chacun des trois intervalles.
2. Que valent $g'(-1)$ et $g'(2)$? Justifier.
3. Comparer $g(0)$ et $g(1)$.
4. Donner le minimum et le maximum de g sur $[-4\,;4]$.
5. Peut-on comparer $g(-3)$ et $g(3)$?
6. Combien de solutions l'équation $g(x) = 6$ a-t-elle ?

Exercice 10 — Une tangente qui recoupe la courbe

Corrigé p. 7 →

Soit f la fonction cube, de courbe $\mathcal{C}$, et D la droite d'équation $y = 3x - 2$.

1. Montrer que D est la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 1.
2. Développer $(x-1)^2(x+2)$.
3. En déduire la position de $\mathcal{C}$ par rapport à D.
4. Une tangente peut-elle couper la courbe en un autre point que le point de contact ?
5. Donner une équation de la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse -2. Est-elle parallèle à D ?

Optimiser et approcher

Exercice 11 — Coût marginal et bénéfice maximal

Corrigé p. 7 →

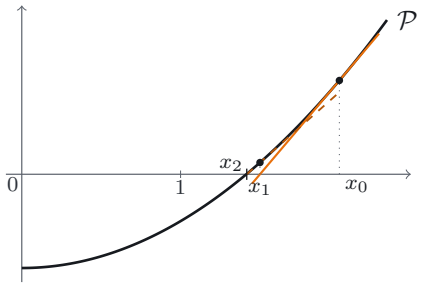
Une entreprise fabrique q centaines d'objets par jour, avec q dans $[0\,;10]$. Le coût de production, en centaines d'euros, est $C(q) = q^3 - 15q^2 + 78q + 30$. La recette, dans la même unité, est $R(q) = 51q$.

1. Calculer $C'(q)$, puis vérifier que $C'(q) = 3(q-5)^2 + 3$. En déduire le sens de variation de C.
2. Calculer $C'(2)$. Ce nombre est appelé coût marginal : interpréter.
3. Montrer que le bénéfice est $B(q) = -q^3 + 15q^2 - 27q - 30$.
4. Étudier les variations de B sur $[0\,;10]$.
5. Quelle production rend le bénéfice maximal ? Quel est ce bénéfice, en euros ?

Exercice 12 — La méthode de Newton pour approcher $\sqrt{2}$

Corrigé p. 7 →

La parabole $\mathcal{P}$ représente la fonction f définie par $f(x) = x^2 - 2$. Partant de $x_0 = 2$, on remplace la courbe par sa tangente : elle coupe l'axe des abscisses en x_1, et on recommence.

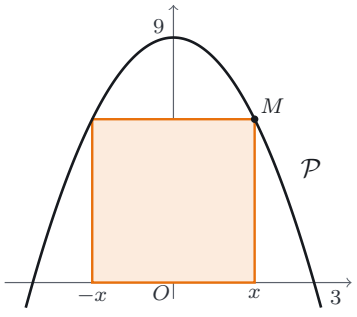


1. Pour $a > 0$, donner une équation de la tangente à $\mathcal{P}$ au point d'abscisse a.
2. Montrer que cette tangente coupe l'axe des abscisses au point d'abscisse $\dfrac{a^2+2}{2a}$.
3. Calculer x_1, x_2 et x_3 sous forme de fractions.
4. Calculer $x_3^2 - 2$. Que peut-on dire de x_3 ?

Exercice 13 — Le plus grand rectangle sous une parabole

Corrigé p. 7 →

La parabole $\mathcal{P}$ a pour équation $y = 9 - x^2$. Pour x dans $]0\,;3[$, le rectangle a pour sommets $(-x\,;0)$, $(x\,;0)$, et deux points de $\mathcal{P}$ dont $M(x\,;9-x^2)$.



1. Montrer que l'aire du rectangle est $A(x) = 18x - 2x^3$.
2. Étudier les variations de A sur $]0\,;3[$.
3. Pour quelle valeur de x l'aire est-elle maximale ? Donner l'aire maximale exacte, puis arrondie au dixième.

Corrigés détaillés

Corrigé 1 · Des sécantes à la tangente

Revenir à l'énoncé

1. $f(2) = 4 - 6 = -2$ et $f(2+h) = 4 + 4h + h^2 - 6 - 3h = h^2 + h - 2$.
2. $\dfrac{f(2+h) - f(2)}{h} = \dfrac{h^2+h}{h} = h + 1$, car $h \neq 0$.
3. Les pentes valent 2 ; $1{,}1$; $1{,}01$ et $0{,}99$.
4. Quand h tend vers 0, $h+1$ tend vers 1 : $f'(2) = 1$. La tangente a pour équation $y = f'(2)(x-2) + f(2)$, soit $y = x - 4$.

Corrigé 2 · Lire des nombres dérivés sur un graphique

Revenir à l'énoncé

1. La tangente en A passe par $(0\,;1)$ et $(1\,;3)$: $f'(0)=2$. La tangente en B est horizontale : $f'(2)=0$. La tangente en E passe par $(4\,;1)$ et $(5\,;-1)$: $f'(4)=-2$.
2. En A : $y=2x+1$. En E : $y=-2(x-4)+1$, soit $y=-2x+9$.
3. $f'(x)=-x+2$, donc $f'(0)=2$, $f'(2)=0$ et $f'(4)=-2$: les lectures sont confirmées.
4. Il faut $f'(x)=-1$, soit $x=3$. Comme $f(3)=-4{,}5+6+1=2{,}5$, c'est le point de coordonnées $(3\,;2{,}5)$.

Corrigé 3 · La tangente pour calculer de tête

Revenir à l'énoncé

1. La dérivée de $x\mapsto\sqrt{x}$ est $x\mapsto\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, qui vaut $\dfrac{1}{4}$ en 4. La tangente a pour équation $y=\dfrac{1}{4}(x-4)+2$, soit $y=\dfrac{x}{4}+1$.
2. $\sqrt{4{,}1}\approx\dfrac{4{,}1}{4}+1=2{,}025$ et $\sqrt{3{,}9}\approx\dfrac{3{,}9}{4}+1=1{,}975$.
3. La calculatrice donne $\sqrt{4{,}1}\approx 2{,}02485$ et $\sqrt{3{,}9}\approx 1{,}97484$: l'écart est inférieur à $0{,}001$.
4. La dérivée de $x\mapsto\dfrac{1}{x}$ vaut -1 en 1 : la tangente a pour équation $y=-(x-1)+1=2-x$. Donc $\dfrac{1}{1{,}02}\approx 2-1{,}02=0{,}98$. La valeur exacte est $0{,}98039\ldots$

Corrigé 4 · La racine carrée n'est pas dérivable en 0

Revenir à l'énoncé

1. $\dfrac{\sqrt{h}-\sqrt{0}}{h}=\dfrac{\sqrt{h}}{h}=\dfrac{\sqrt{h}}{\sqrt{h}\times\sqrt{h}}=\dfrac{1}{\sqrt{h}}$.
2. On obtient 10, 100 et $1\,000$.
3. Quand h tend vers 0, $\sqrt{h}$ tend vers 0 : $\dfrac{1}{\sqrt{h}}$ dépasse tout nombre fixé. Il n'y a pas de limite finie, donc la fonction racine carrée n'est pas dérivable en 0.
4. Les pentes des sécantes deviennent aussi grandes que l'on veut : la courbe n'a pas, à l'origine, de tangente avec un coefficient directeur. Sur le dessin, elle y devient presque verticale.

Corrigé 5 · Six dérivées, six règles

Revenir à l'énoncé

1. Somme de fonctions usuelles : $f'(x)=3x^2-12x$.
2. $g'(x)=4\times\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)=-\dfrac{4}{x^2}$.
3. Produit uv avec $u(x)=2x+1$ et $v(x)=\sqrt{x}$: $h'(x)=2\sqrt{x}+\dfrac{2x+1}{2\sqrt{x}}=\dfrac{6x+1}{2\sqrt{x}}$.
4. Quotient : $k'(x)=\dfrac{3(x+2)-(3x-1)\times 1}{(x+2)^2}=\dfrac{7}{(x+2)^2}$.
5. $m(x)=u(2x-5)$ avec $u(X)=X^3$: $m'(x)=2\times 3(2x-5)^2=6(2x-5)^2$.
6. $n=\dfrac{5}{v}$ avec $v(x)=2x+3$: $n'(x)=-\dfrac{5\times 2}{(2x+3)^2}=-\dfrac{10}{(2x+3)^2}$.

Corrigé 6 · Corriger une copie

Revenir à l'énoncé

1. Faux : la dérivée d'un produit n'est pas le produit des dérivées. $f'(x) = 2x(x+1) + x^2 \times 1 = 3x^2 + 2x$.
2. Juste : $g'(x) = \dfrac{1 \times x - (x-1) \times 1}{x^2} = \dfrac{1}{x^2}$. On peut aussi écrire $g(x) = 1 - \dfrac{1}{x}$.
3. Faux : h est de la forme $u(ax+b)$ avec $a = 4$, et ce facteur manque. Ainsi $h'(x) = \dfrac{4}{2\sqrt{4x+1}} = \dfrac{2}{\sqrt{4x+1}}$.
4. Faux : la dérivée de $\dfrac{1}{v}$ est $-\dfrac{v'}{v^2}$. $k'(x) = -\dfrac{2x}{(x^2+1)^2}$.

Corrigé 7 · Démontrer la dérivée d'un produit

Revenir à l'énoncé

1. On développe le membre de droite : $u(a+h)v(a+h) - u(a)v(a+h) + u(a)v(a+h) - u(a)v(a)$. Les deux termes du milieu s'annulent, il reste $u(a+h)v(a+h) - u(a)v(a)$.
2. Le taux vaut $\dfrac{u(a+h)-u(a)}{h} \times v(a+h) + u(a) \times \dfrac{v(a+h)-v(a)}{h}$. Quand h tend vers 0, les deux quotients tendent vers $u'(a)$ et $v'(a)$, et $v(a+h)$ vers $v(a)$: la limite est $u'(a)v(a) + u(a)v'(a)$.
3. Ainsi uv est dérivable sur I et $(uv)' = u'v + uv'$. Pour $f(x) = x\sqrt{x}$, on trouve $f'(x) = \sqrt{x} + \dfrac{x}{2\sqrt{x}} = \dfrac{3}{2}\sqrt{x}$.

Corrigé 8 · Un tableau de variation pas à pas

Revenir à l'énoncé

1. $f'(x) = 3x^2 - 6x - 9$, et $3(x+1)(x-3) = 3(x^2 - 2x - 3) = 3x^2 - 6x - 9$.
2. Le trinôme a pour racines -1 et 3, et $a = 3 > 0$: $f'(x) > 0$ sur $[-3\,;-1[$ et sur $]3\,;5]$, $f'(x) < 0$ sur $]-1\,;3[$.
3. $f(-3) = -23$, $f(-1) = 9$, $f(3) = -23$ et $f(5) = 9$.

x	-3		-1		3		5
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f	-23	↗	9	↘	-23	↗	9

4. Le maximum vaut 9, atteint en -1 et en 5. Le minimum vaut -23, atteint en -3 et en 3.
5. Toutes les valeurs de f sur l'intervalle sont comprises entre son minimum et son maximum.

Corrigé 9 · Lire un tableau de variation

Revenir à l'énoncé

1. $g'(x) \leqslant 0$ sur $[-4\,;-1]$, $g'(x) \geqslant 0$ sur $[-1\,;2]$ et $g'(x) \leqslant 0$ sur $[2\,;4]$.
2. g admet en -1 un minimum et en 2 un maximum, à l'intérieur de l'intervalle : $g'(-1) = 0$ et $g'(2) = 0$. Les tangentes y sont horizontales.
3. 0 et 1 sont dans $[-1\,;2]$, où g est croissante : $g(0) \leqslant g(1)$.
4. Le minimum vaut -2, atteint en -1. Le maximum vaut 5, atteint en 2.
5. Non : $g(-3)$ est entre -2 et 3, et $g(3)$ entre 1 et 5. Ces intervalles se chevauchent, le tableau ne permet pas de conclure.
6. Aucune : le maximum de g vaut 5, donc $g(x) \leqslant 5 < 6$ pour tout x.

Corrigé 10 · Une tangente qui recoupe la courbe

Revenir à l'énoncé

1. $f'(x) = 3x^2$, donc $f'(1) = 3$ et $f(1) = 1$. La tangente a pour équation $y = 3(x-1)+1 = 3x-2$: c'est D.
2. $(x-1)^2(x+2) = (x^2-2x+1)(x+2) = x^3-3x+2$.
3. $f(x)-(3x-2) = x^3-3x+2 = (x-1)^2(x+2)$. Comme $(x-1)^2 \geqslant 0$, cette différence a le signe de $x+2$. $\mathcal{C}$ est au-dessus de D sur $]-2\,;+\infty[$, sauf en 1 où ils se touchent, et au-dessous sur $]-\infty\,;-2[$. Leurs points communs ont pour abscisses -2 et 1.
4. Oui : $\mathcal{C}$ et D se coupent aussi au point d'abscisse -2, de coordonnées $(-2\,;-8)$.
5. $f'(-2) = 12$ et $f(-2) = -8$: $y = 12(x+2)-8 = 12x+16$. Son coefficient directeur vaut 12, et non 3 : elle n'est pas parallèle à D.

Corrigé 11 · Coût marginal et bénéfice maximal

Revenir à l'énoncé

1. $C'(q) = 3q^2-30q+78$, et $3(q-5)^2+3 = 3q^2-30q+75+3$. Comme $C'(q) \geqslant 3 > 0$, C est croissante sur $[0\,;10]$.
2. $C'(2) = 3\times 9+3 = 30$. À partir de 200 objets, une hausse de h centaines d'objets, avec h petit, augmente le coût d'environ $30h$ centaines d'euros : une centaine d'objets de plus coûte environ $3\,000$ euros.
3. $B(q) = R(q)-C(q) = 51q-q^3+15q^2-78q-30 = -q^3+15q^2-27q-30$.
4. $B'(q) = -3q^2+30q-27 = -3(q-1)(q-9)$. Ce trinôme de coefficient $-3<0$ a pour racines 1 et 9 : $B'(q)<0$ sur $[0\,;1[$ et sur $]9\,;10]$, $B'(q)>0$ sur $]1\,;9[$. Donc B décroît sur $[0\,;1]$, croît sur $[1\,;9]$, puis décroît sur $[9\,;10]$, avec $B(0) = -30$, $B(1) = -43$, $B(9) = 213$ et $B(10) = 200$.

q	0		1		9		10
$B'(q)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
B	-30	↘	-43	↗	213	↘	200

5. Le bénéfice est maximal pour 900 objets par jour : il vaut 213 centaines d'euros, soit $21\,300$ euros.

Corrigé 12 · La méthode de Newton pour approcher $\sqrt{2}$

Revenir à l'énoncé

1. $f'(a) = 2a$, donc la tangente a pour équation $y = 2a(x-a)+a^2-2$.
2. $y=0$ donne $2a(x-a) = 2-a^2$, soit $x = a+\dfrac{2-a^2}{2a} = \dfrac{a^2+2}{2a}$.
3. $x_1 = \dfrac{4+2}{4} = \dfrac{3}{2}$, $x_2 = \dfrac{\frac{9}{4}+2}{3} = \dfrac{17}{12}$ et $x_3 = \dfrac{577}{408}$.
4. $x_3^2-2 = \dfrac{332\,929-332\,928}{166\,464} = \dfrac{1}{166\,464}$, soit environ 6×10^{-6}. Ainsi $x_3 \approx 1{,}414216$, alors que $\sqrt{2} \approx 1{,}414214$: x_3 approche $\sqrt{2}$ à 10^{-5} près.

Corrigé 13 · Le plus grand rectangle sous une parabole

Revenir à l'énoncé

1. La base mesure $2x$ et la hauteur $9-x^2$: $A(x) = 2x(9-x^2) = 18x-2x^3$.
2. $A'(x) = 18-6x^2 = 6(\sqrt{3}-x)(\sqrt{3}+x)$. Sur $]0\,;3[$, $\sqrt{3}+x>0$: $A'(x)>0$ avant $\sqrt{3}$ et $A'(x)<0$ après. A croît sur $]0\,;\sqrt{3}]$ et décroît sur $[\sqrt{3}\,;3[$.
3. L'aire est maximale pour $x = \sqrt{3}$: $A(\sqrt{3}) = 2\sqrt{3}\times 6 = 12\sqrt{3}$, soit environ $20{,}8$.

Pour continuer : les exercices de Première en ligne sur la dérivation, puis les exercices sur les variations et l'optimisation.