FICHE D'EXERCICES CORRIGÉS

Arithmétique

3e · Exercices corrigés

Cette fiche fait travailler la décision et la justification, pas seulement la division posée. Le cours d'arithmétique reprend les définitions utiles avant les exercices.

Décider et justifier

Exercice 1 | Des critères qui ne disent pas la même chose

Corrigé p. 3 →

On considère $A = 2\,364$ et $B = 2\,187$.

1. Pour chacun, indiquer s'il est divisible par 2, 3, 4, 5, 9 et 10.
2. Justifier spécialement les réponses pour 4 et pour 9.
3. B est divisible par 9. Peut-on en conclure qu'il est divisible par 18 ?

Exercice 2 | Une mauvaise règle pour les nombres premiers

Corrigé p. 3 →

Un élève affirme : « Un entier impair qui n'est multiple ni de 3 ni de 5 est premier. »

1. Donner un contre-exemple et nommer un de ses diviseurs autres que 1 et lui-même.
2. Pour décider si 89 est premier, quels diviseurs premiers suffit-il de tester ? Justifier la limite des tests.
3. Effectuer ces tests et conclure pour 89.
4. Expliquer séparément pourquoi 1 n'est pas premier et pourquoi 2 l'est.

Exercice 3 | Prouver ou réfuter

Corrigé p. 3 →

Dans chaque phrase, n désigne un entier positif. Dire si la conclusion est toujours vraie ; fournir une justification ou un contre-exemple.

1. Si 3 et 4 divisent n, alors 12 divise n.
2. Si 2 et 4 divisent n, alors 8 divise n.
3. Si 6 et 15 divisent n, alors 30 divise n.

Exercice 4 | La ligne oubliée d'une décomposition

Corrigé p. 4 →

Une copie annonce $630 = 2 \times 3 \times 5 \times 7$.

1. Vérifier le produit écrit dans la copie ; identifier le facteur qui manque.
2. Écrire la décomposition exacte de 630 en facteurs premiers.
3. Sans poser de division, décider si 42, 90 et 100 divisent 630.

Choisir les facteurs utiles

Exercice 5 | Le plus petit facteur à ajouter

Corrigé p. 4 →

On cherche le plus petit entier positif k tel que $36k$ soit divisible à la fois par 40 et par 27.

1. Décomposer 36, 40 et 27 en facteurs premiers.
2. Déterminer k et expliquer pourquoi aucune valeur positive plus petite ne convient.
3. Calculer $36k$ et contrôler les deux divisibilités.
4. Pourquoi $k = 15$ ne suffit-il pas ?

Exercice 6 | Deux conditions simultanées

Corrigé p. 4 →

On cherche les entiers strictement compris entre 100 et 150 qui sont divisibles à la fois par 12 et par 18.

1. À l'aide des facteurs premiers, déterminer le plus petit entier positif divisible par 12 et par 18.
2. En déduire tous les entiers demandés, sans tester chaque entier de l'intervalle.
3. Quel est le premier entier supérieur à 150 qui vérifie encore les deux conditions ?

Fractions équivalentes, fraction irréductible

Exercice 7 | Simplifier, puis reconstruire

Corrigé p. 4 →

On part de $\frac{324}{450}$.

1. Rendre cette fraction irréductible en montrant les facteurs simplifiés.
2. Écrire une fraction égale à la précédente dont le dénominateur est 100.
3. Un élève veut encore simplifier par 3 parce que le nouveau numérateur est divisible par 3. Quelle condition a-t-il oubliée ?

Exercice 8 | Une simplification juste, une conclusion fausse

Corrigé p. 4 →

Sur sa copie, Lina écrit $\frac{84}{126} = \frac{12}{18}$ et ajoute : « La fraction est maintenant irréductible. »

1. Expliquer pourquoi la première égalité est exacte.
2. Identifier l'erreur de conclusion et donner l'écriture irréductible.
3. Contrôler par produits en croix que la fraction initiale et la fraction finale sont égales.

Exercice 9 | Choisir un numérateur

Corrigé p. 4 →

Parmi 16, 21, 24, 26 et 28, sélectionner les valeurs de a pour lesquelles $\frac{a}{35}$ est irréductible.

1. Décomposer 35 en facteurs premiers.
2. Tester chacune des cinq valeurs de a et justifier le choix.
3. Donner une condition simple sur un entier positif a qui garantit que $\frac{a}{35}$ soit irréductible.

Exercice 10 | Un dénominateur possible, un autre impossible

Corrigé p. 4 →

Une fraction égale à $\frac{5}{7}$ doit avoir un numérateur entier positif.

1. Quel est son numérateur si son dénominateur vaut 84 ? Vérifier.
2. Peut-elle avoir 90 pour dénominateur ? Justifier sans arrondir.
3. Trouver le plus petit dénominateur strictement supérieur à 90 qui convient, puis le numérateur correspondant.

Choisir une méthode dans une situation

Exercice 11 | Une collection, deux présentations

Corrigé p. 4 →

Une galerie choisit entre 130 et 190 œuvres pour une exposition. Le diaporama les montre par écrans de 18 ; le catalogue leur réserve des doubles-pages de 24. Aucune place ne doit rester vide et les deux supports doivent présenter exactement les mêmes œuvres.

1. Exprimer les deux conditions de divisibilité sur le nombre d'œuvres.
2. Trouver le nombre d'œuvres possible dans l'intervalle imposé.
3. Combien faut-il d'écrans et de doubles-pages ?
4. On propose plutôt 180 œuvres. Dire précisément quelle contrainte échoue.

Corrigés détaillés

Corrigé 1 · Des critères qui ne disent pas la même chose

Revenir à l'énoncé

1. $2\,364$ est divisible par 2, 3 et 4, mais pas par 5, 9 ni 10. $2\,187$ est divisible par 3 et 9, mais pas par 2, 4, 5 ni 10.
2. Les deux derniers chiffres de $2\,364$ sont $64 = 4 \times 16$; ceux de $2\,187$ sont 87, qui n'est pas multiple de 4. Les sommes des chiffres valent respectivement 15 et 18 : seule la seconde est multiple de 9.
3. Non. $18 = 2 \times 9$; il faudrait aussi que B soit pair. Or $2\,187$ est impair.

Corrigé 2 · Une mauvaise règle pour les nombres premiers

Revenir à l'énoncé

1. 49 est impair, n'est multiple ni de 3 ni de 5, mais $49 = 7 \times 7$: il possède le diviseur 7. Ce contre-exemple suffit à réfuter la règle.
2. Comme $\sqrt{89} < 10$, il suffit de tester les nombres premiers 2, 3, 5 et 7. Un entier composé possède au moins un diviseur premier inférieur ou égal à sa racine carrée.
3. 89 est impair, sa somme de chiffres vaut 17, il ne se termine pas par 0 ou 5, et $7 \times 12 = 84 < 89 < 91 = 7 \times 13$. Aucun des quatre nombres ne le divise : 89 est premier.
4. 1 n'a qu'un diviseur positif ; 2 en a exactement deux, 1 et 2. Donc 1 n'est pas premier et 2 l'est.

Corrigé 3 · Prouver ou réfuter

Revenir à l'énoncé

1. Vrai : 3 et 4 sont premiers entre eux ; leurs facteurs réunis sont 3 et 2^2. Tout multiple commun contient donc $12 = 2^2 \times 3$.
2. Faux : $n = 4$ est divisible par 2 et par 4, mais pas par 8. La condition « divisible par 2 » n'ajoute aucun facteur à « divisible par 4 ».
3. Vrai : être divisible par $6 = 2 \times 3$ impose les facteurs 2 et 3, et être divisible par $15 = 3 \times 5$ impose aussi 5. On obtient ainsi $2 \times 3 \times 5 = 30$ comme diviseur de n.

Corrigé 4 · La ligne oubliée d'une décomposition

Revenir à l'énoncé

1. $2 \times 3 \times 5 \times 7 = 210$ et $630 = 3 \times 210$: il manque un second facteur 3.

2. $630 = 2 \times 3^2 \times 5 \times 7$; tous les facteurs affichés sont premiers.

3. $42 = 2 \times 3 \times 7$ et $90 = 2 \times 3^2 \times 5$ divisent 630, car chacun de leurs facteurs apparaît avec un exposant suffisant. En revanche, $100 = 2^2 \times 5^2$ ne le divise pas : 630 ne contient qu'un facteur 2 et qu'un facteur 5.

Corrigé 5 · Le plus petit facteur à ajouter

Revenir à l'énoncé

1. $36 = 2^2 \times 3^2$, $40 = 2^3 \times 5$ et $27 = 3^3$.

2. Pour que $36k$ contienne les facteurs de 40 et de 27, il manque au moins un 2, un 3 et un 5. Le plus petit choix est donc $k = 2 \times 3 \times 5 = 30$; tout choix positif convenable doit contenir ces trois facteurs.

3. $36k = 36 \times 30 = 1\,080$, avec $1\,080 \div 40 = 27$ et $1\,080 \div 27 = 40$.

4. $36 \times 15 = 540$ est multiple de 27, mais $540 \div 40 = 13{,}5$ n'est pas entier : il manque le facteur 2 nécessaire pour 40.

Corrigé 6 · Deux conditions simultanées

Revenir à l'énoncé

1. $12 = 2^2 \times 3$ et $18 = 2 \times 3^2$. Un multiple commun doit contenir $2^2 \times 3^2 = 36$, et 36 est le plus petit entier positif qui satisfait les deux conditions.

2. Les multiples de 36 strictement compris entre 100 et 150 sont $108 = 3 \times 36$ et $144 = 4 \times 36$.

3. Le multiple suivant est $180 = 5 \times 36$, premier au-dessus de 150.

Corrigé 7 · Simplifier, puis reconstruire

Revenir à l'énoncé

1. $324 = 2^2 \times 3^4$ et $450 = 2 \times 3^2 \times 5^2$. On simplifie par $2 \times 3^2 = 18$: $\dfrac{324}{450} = \dfrac{18}{25}$. Comme $18 = 2 \times 3^2$ et $25 = 5^2$ n'ont aucun facteur premier commun, la fraction obtenue est irréductible.

2. $100 = 4 \times 25$; en multipliant les deux termes par 4, on obtient $\dfrac{72}{100}$.

3. On ne peut simplifier par 3 que si le numérateur *et* le dénominateur sont divisibles par 3. Or 25 ne l'est pas.

Corrigé 8 · Une simplification juste, une conclusion fausse

Revenir à l'énoncé

1. $84 \div 7 = 12$ et $126 \div 7 = 18$: Lina a divisé les deux termes par le même entier non nul, ce qui conserve la valeur de la fraction.

2. 12 et 18 sont tous deux divisibles par 6 ; $\dfrac{12}{18} = \dfrac{2}{3}$. Les entiers 2 et 3 sont premiers entre eux.

3. $84 \times 3 = 252$ et $126 \times 2 = 252$; les produits en croix sont égaux, donc $\dfrac{84}{126} = \dfrac{2}{3}$.

Corrigé 9 · Choisir un numérateur

Revenir à l'énoncé

1. $35 = 5 \times 7$.

2. 16, 24 et 26 ne sont multiples ni de 5 ni de 7 : les trois fractions correspondantes sont irréductibles. $21 = 3 \times 7$ et $28 = 4 \times 7$ partagent le facteur 7 avec 35.

3. Pour $a > 0$, $a/35$ est irréductible exactement lorsque a n'est divisible ni par 5 ni par 7.

Corrigé 10 · Un dénominateur possible, un autre impossible

Revenir à l'énoncé

1. $84 = 12 \times 7$, donc le numérateur est $12 \times 5 = 60$; $60/84 = 5/7$ après division des deux termes par 12.

2. Un numérateur a devrait vérifier $a/90 = 5/7$, soit $7a = 450$. Comme 450 n'est pas divisible par 7, aucun entier a ne convient.

3. Le premier multiple de 7 strictement supérieur à 90 est $91 = 13 \times 7$; le numérateur correspondant est $13 \times 5 = 65$.

Corrigé 11 · Une collection, deux présentations

Revenir à l'énoncé

1. Le nombre N d'œuvres doit être divisible par 18 et par 24.

2. $18 = 2 \times 3^2$ et $24 = 2^3 \times 3$; leur plus petit multiple commun est $2^3 \times 3^2 = 72$. Entre 130 et 190, seul $144 = 2 \times 72$ convient.

3. $144 \div 18 = 8$ écrans et $144 \div 24 = 6$ doubles-pages.

4. $180 \div 18 = 10$, mais $180 \div 24 = 7{,}5$: le catalogue aurait une double-page incomplète, contrairement à la consigne.

Pour revoir une méthode, consulter le cours d'arithmétique de 3e. Les exercices corrigés du même chapitre sur PediaMath proposent une autre série de questions.